OSN Fisika 2019

Soal dan Solusi

Dimensi Sains Corp

Bersama Kita Sainskan Indonesia

www.basyiralbanjari.wordpress.com

Dimensi Sains Corp

Tahun 2019

Tentang Dimensi Sains

Dimensi Sains menyediakan fasilitas untuk siswa-siswa indonesia untuk belajar fisika lebih dalam khususnya olimpiade fisika. Kami menyediakan website yang berisi kumpulan soal, soal bahas, soal olimpiade mingguan, buku referensi, dan banyak lagi materi lainnya yang bisa temen-temen gunakan untuk belajar olimpiade fisika. Selain itu kami juga mengadakan olimpiade mingguan. Kalian bisa cek info terkait olimpiade mingguan ini di website kami yaitu www.basyiralbanjari.wordpress.com. Kami juga mengadakan try out online berbayar pra OSK, OSP, dan OSN tiap tahunnya. Follow media sosial kami berikut ini untuk informasi selengkapnya

Instagram	: @dimensi_sains
Facebook	: Dimensi Sains
ID Line	: mr.sainsworld
Whatsapp	: 0831-4325-9061
Website	: www.basyiralbanjari.wordpress.com
Email	: mr.sainsworld@gmail.com

Solusi ini dibuat oleh Ahmad Basyir Najwan, alumni OSN tahun 2017 dan 2018. Kakak ini telah meraih medali emas untuk bidang fisika pada OSN tahun 2018 di Padang, Sumatera Barat. Beiau juga telah mengikuti Pelatihan Nasional Tahap I di Jogjakarta pada Oktober 2018 dan Pelatihan Nasional Tahap II di Bandung pada Maret 2019.

Tentunya masih banyak sekali kekurangan dari solusi ini. Oleh karena itu, kami mengharapkan masukan dari seluruh pembaca, baik berupa koreksi dari kesalahan ketik dan lain sebagainya maupun saran untuk kami kedepannya agar menjadi lebih baik lagi. Masukan bisa temen-temen kirimkan melalui media sosial kami yang telah disebutkan di atas.

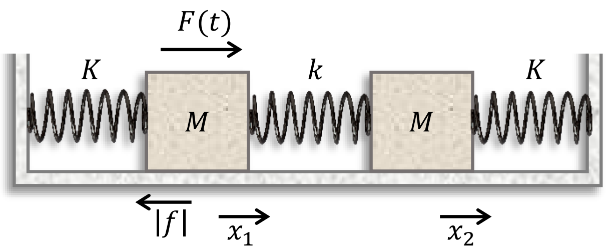
OSN Fisika SMA

30 Juni - 6 Juli 2019

Waktu 5 Jam

1. **Fenomena Resonansi dan Anti-Resonansi**

Fenomena yang sangat dikenal dari osilasi pegas-massa adalah fenomena resonansi, dimana gangguan (gaya eksternal) dengan frekuensi yang dekat dengan frekuensi osilasi sistem (mode normal) menyebabkan amflifikasi getaran. Pada sistem osilasi beberapa benda, juga terdapat fenomena anti-resonansi (yang mungkin tidak begitu dikenal). Fenomena anti-resonansi ini merupakan kebalikan dari fenomena resonansi, di mana gaya eksternal menyebabkan de-amplifikasi getaran.



Dua massa M terhubung dengan pegas-pegas seperti pada gambar di atas, dimana $k < K$. Terdapat gaya eksternal $F(t) = F_0 \cos \omega t$ pada massa pertama yang mengakibatkan simpangan x_1 dan x_2 pada kedua massa tersebut. Terdapat juga gaya gesek dinamis $\vec{f} = -\gamma \vec{v}_1 = -\gamma \dot{x}_1 \hat{x}_1$ yang bekerja pada massa pertama dan tidak ada gaya pada masa kedua. untuk soal ini, anggap koefisien gesek dinamis kecil ($\gamma \ll MK$).

a. Tuliskan persamaan diferensial gerak untuk kedua massa tersebut (dinyatakan dalam siimpangan getaran x_1 dan x_2 (beserta turunannya: $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\ddot{x}_1$, dan $\ddot{x}_2$), massa M, konstanta pegas K dan k, gaya eksternal $F(t)$ dan koefisien gesek dinamis γ!

b. Tinjau fenomena resonansi. Gaya eksternal F menyebabkan resonansi pada kedua mode normal sistem: ${\omega_a}^2 = K/M$ dan ${\omega_b}^2 = (K + 2k)/M$ (anda tidak perlu menurunkan ini). Carilah amplitudo getaran A_1 dan A_2 untuk kedua kasus mode normal tersebut (dinyatakan dalam F_0, γ, ω_a, dan ω_b)!

   Tunjukkan juga bahwa amplitudo getaran ketika resonansi jauh lebih besar daripada simpangan pegas untuk kasus gaya konstan $A(\omega = 0) = F_0 k / K(K + 2k)$!

Petunjuk: Pada keadaan resonansi, getaran massa memiliki keterlambatan fase sebesar 90^{o} dari gaya eksternal F.

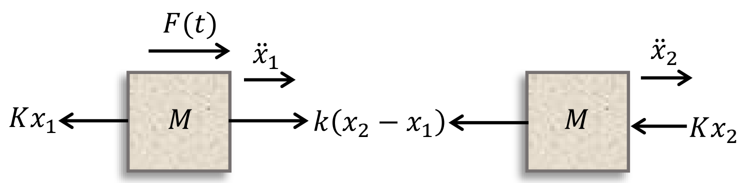
c. Tinjau fenomena antiresonansi. Pada sistem ini, frekuensi anti resonansi adalah:

$$\omega_{\text{anti}}{}^2 = \frac{\omega_a{}^2 + \omega_b{}^2}{2}$$

Carilah amplitudo getaran A_1 dan A_2 pada kasus ini! Apakah fenomena anti-resonansi terjadi pada kedua massa tersebut?

Solusi :

a. Kita namakan massa sebelah kiri sebagai m_1 dan massa sebelah kanan sebagai m_2. Perhatikan diagram gaya pada m_1 dan m_2 berikut!



Dari diagram di atas, akan kita peroleh persamaan gerak sistem

Untuk m_1 :

$$-Kx_1 + k(x_2 - x_1) - \gamma\dot{x}_1 + F(t) = M\ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{\gamma}{M}\dot{x}_1 + \frac{K+k}{M}x_1 - \frac{k}{M}x_2 = \frac{F_0}{M}\cos\omega t \ldots (1)$$

Untuk m_2 :

$$-k(x_2 - x_1) - Kx_2 = M\ddot{x}_2$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{K+k}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 = 0 \ldots (2)$$

b. Kita ketahui bahwa

$$\omega_a{}^2 = \frac{K}{M} \text{ dan } \omega_b{}^2 = \frac{K+2k}{M}$$

Sehingga kita punya hubungan berikut

$$\frac{K+k}{M} = \frac{1}{2}(\omega_b{}^2 + \omega_a{}^2) \text{ dan } \frac{k}{M} = \frac{1}{2}(\omega_b{}^2 - \omega_a{}^2)$$

Sekarang mari kita gunakan metode bilangan kompleks untuk menemukan amplitudo getaran tiap massa. Dengan metode kompleks, penyelesaian akan lebih sederhana. Perlu dicatat bahwa dengan menggunakan metode kompleks ini kita mengabaikan suku transien dari persamaan geteran tiap massa karena suku transien ini untuk selang waktu yang sangat lama nilainya akan menuju nol. Kita gunakan gaya eksternal $F(t)$ dalam bentuk kompleks

$$\tilde{F}(t) = F_0 e^{i\omega t} \text{ dengan } F(t) = Re[\tilde{F}(t)]$$

Dengan pula mengingat persamaan euler yaitu

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ serta } i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

Kita gunakan pula simpangan m_1 dan m_2 dalam bentuk kompleks yaitu $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ dengan $x_1 = Re[\tilde{x}_1]$ dan $x_2 = Re[\tilde{x}_2]$ sehingga persamaan (1) dan (2) dapat kita nyatakan ulang sebagai berikut

$$\ddot{\tilde{x}}_1 + \frac{\gamma}{M}\dot{\tilde{x}}_1 + \frac{1}{2}({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2)\tilde{x}_1 - \frac{1}{2}({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)\tilde{x}_2 = \frac{F_0}{M}e^{i\omega t} \ldots (3)$$

$$\ddot{\tilde{x}}_2 + \frac{1}{2}({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2)\tilde{x}_2 - \frac{1}{2}({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)\tilde{x}_1 = 0 \ldots (2)$$

Solusi untuk $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ akan memenuhi bentuk berikut

$$\tilde{x}_1 = A_1 e^{i(\omega t - \phi_1)} \text{ dan } \tilde{x}_2 = A_2 e^{i(\omega t - \phi_2)}$$

Sesuai metode penyelesaian persamaan diferensial orde dua, dimana A_1 dan A_2 adalah amplitudo massa kiri dan kanan serta ϕ_1 dan ϕ_2 adalah beda fase getaran dengan gaya eksternal. Kalian yang bingung mengapa hal ini bisa terjadi saya anjurkan untuk membaca buku Kalkulus Jilid 2 tentang "**Persamaan Diferensial Orde Dua**". Untuk turunan pertama dan keduanya kita peroleh pula

$$\tilde{x}_1 = A_1 e^{i(\omega t - \phi_1)}, \dot{\tilde{x}}_1 = i\omega A_1 e^{i(\omega t - \phi_1)}, \text{dan } \ddot{\tilde{x}}_1 = -\omega^2 A_1 e^{i(\omega t - \phi_1)}$$

$$\tilde{x}_2 = A_2 e^{i(\omega t - \phi_2)}, \dot{\tilde{x}}_2 = i\omega A_2 e^{i(\omega t - \phi_2)}, \text{dan } \ddot{\tilde{x}}_2 = -\omega^2 A_2 e^{i(\omega t - \phi_2)}$$

Sehingga, setelah kita sederhankan persamaan gerak sistem akan menjadi

$$({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)A_1 + i\frac{2\gamma\omega}{M}A_1 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)A_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)} = \frac{2F_0}{M}e^{i\phi_1} \ldots (5)$$

$$({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)A_2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)A_1 e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} = 0 \ldots (6)$$

Ada beberapa cara untuk mendapatkan masing-masing nilai A_1, A_2, ϕ_1, dan ϕ_2. Sebenarnya, kita bisa langsung subtitusi $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$ untuk kondisi resonansi. Kita mendapat petunjuk dari soal bahwa getaran massa terlambat 90^{o} dari gaya eksternal $F(t)$. Akan tetapi, saya ingin menunjukan secara lebih jelas bahwa memang saat resonansi beda fase antara getaran tiap massa dan gaya eksternalnya adalah 90^{o}. Jadi untuk saat ini kita tetap tinjau untuk kasus umum.

Metode Subtitusi-Eliminasi

Dari persamaan (6) kita bisa dapatkan

$$A_2 = \frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2} A_1 e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \ldots (7)$$

$$A_1 = \frac{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2} A_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \ldots (8)$$

Subtitusi persamaan (7) ke (5) akan kita dapatkan pula

$$({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)A_1 + i\frac{2\gamma\omega}{M}A_1 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)\frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}A_1 = \frac{2F_0}{M}e^{i\phi_1}$$

$$\left[\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\right]A_1 + i\frac{2\gamma\omega}{M}A_1 = \frac{2F_0}{M}\cos\phi_1 + i\frac{2F_0}{M}\sin\phi_1$$

Dari kesamaan suku imaginer dan real pada kedua sisi akan kita peroleh

$$\frac{2F_0}{M}\sin\phi_1 = \frac{2\gamma\omega}{M}A_1$$

$$\frac{2F_0}{M}\cos\phi_1 = \left[\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\right]A_1$$

Menggunakan identitas trigonometri, kita bisa mengeliminasi suku yang mengandung ϕ_1 dan menemukan A_1

$$\frac{4{F_0}^2}{M^2}(\sin^2\phi_1 + \cos^2\phi_1) = \frac{4{F_0}^2}{M^2}$$

$$= \left\{\frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2} + \left[\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\right]^2\right\}{A_1}^2$$

$$A_1 = \frac{2F_0/M}{\sqrt{\frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2} + \left[\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\right]^2}} \ldots (9)$$

Kemudian dengan perbandingan kita bisa mengeliminasi A_1 dan kita bisa mendapatkan suku ϕ_1

$$\frac{\frac{2F_0}{M}\sin\phi_1}{\frac{2F_0}{M}\cos\phi_1} = \frac{\frac{2\gamma\omega}{M}A_1}{\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}A_1}$$

$$\tan\phi_1=\frac{2\gamma\omega}{M}\left(\frac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2)^2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)^2}\right)\dots(10)$$

Dengan proses yang mirip seperti sebelumnya, kita subtitusi persamaan (8) ke (5) dan kedepan kita bisa dapatkan A_2 serta ϕ_2

$$\left({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2+i\frac{2\gamma\omega}{M}\right)\frac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}A_2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)A_2=\frac{2F_0}{M}e^{i\phi_2}$$

$$\left[\frac{({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2)^2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right]A_2+i\frac{2\gamma\omega}{M}\left(\frac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right)A_2$$

$$=\frac{2F_0}{M}\cos\phi_2+i\frac{2F_0}{M}\sin\phi_2$$

Seperti sebelumnya, kesamaan suku imaginer dan real, kita peroleh

$$\frac{2F_0}{M}\sin\phi_2=\frac{2\gamma\omega}{M}\left(\frac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right)A_2$$

$$\frac{2F_0}{M}\cos\phi_2=\left[\frac{({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2)^2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right]A_2$$

Menggunakan identitas trigonometri seperti sebelumnya, kita peroleh A_2

$$\frac{4{F_0}^2}{M^2}=\left\{\frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2}\left(\frac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left[\frac{({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2)^2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right]^2\right\}{A_2}^2$$

$$A_2=\frac{2F_0/M}{\dfrac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\sqrt{\dfrac{4\gamma^2\omega^2}{M^2}+\left[\dfrac{({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2)^2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}\right]^2}}$$

Kemudian dengan perbandingan akan kita peroleh pula ϕ_2

$$\frac{\frac{2F_0}{M}\sin\phi_2}{\frac{2F_0}{M}\cos\phi_2}=\frac{\frac{2\gamma\omega}{M}\left(\frac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right)A_2}{\left[\frac{({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2)^2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2-{\omega_a}^2}\right]A_2}$$

$$\tan\phi_2=\frac{2\gamma\omega}{M}\left(\frac{{\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2}{({\omega_b}^2+{\omega_a}^2-2\omega^2)^2-({\omega_b}^2-{\omega_a}^2)^2}\right)\dots(10)$$

Dari hasil di atas kita dapatkan hubungan berikut

$$\tan\phi_1=\tan\phi_2\Longrightarrow\phi_1=\phi_2$$

Ternyata beda fase kedua massa sama dan hal inilah yang memang ingin saya tunjukkan pada kalian, bahwa pada suatu sistem terkopel (osilasi yang terdiri dari beberapa benda) yang diberi gaya sinusoidal, khususnya sistem pegas massa, maka setiap massa pada sistem ini akan memiliki beda fase yang sama dengan gaya eksternal yang diberikan.

Saat resonansi, frekuensi gaya eksternal sama dengan frekuensi mode normal sistem, $\omega^2 = {\omega_a}^2$ atau $\omega^2 = {\omega_b}^2$. Saat kita gunakan nilai tersebut, akan kita peroleh suku di bawah bernilai nol dan hasilnya tidak terdefinisi. Maka kita gunakan limit $\omega^2 \to {\omega_a}^2, {\omega_b}^2$ sehingga akan kita peroleh bahwa

$$\tan\phi_1|_{\omega^2\to{\omega_a}^2,{\omega_b}^2} = \lim_{\omega^2\to{\omega_a}^2,{\omega_b}^2} \frac{2\gamma\omega}{M}\left(\frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}\right) = \infty$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Sesuai dengan petunjuk pada soal bahwa Pada keadaan resonansi, getaran massa memiliki keterlambatan fase sebesar 90^{o} dari gaya eksternal F. Keterlambatan dapat diartikan bahwa ada pengurangan $\pi/2$ pada sudut fase getaran. Fisisnya, saat $t = 0$, sudut fase gaya $F(t)$ adalah 0 sedangkan sudut fase getaran adalah $-\pi/2$ dimana tanda minus menyatakan ketertinggalan.

Metode Matriks

Ini hanyalah metode alternatif lain yang bisa kita gunakan. Terlebih dahulu, untuk memudahkan, kita gunakan petunjuk dari soal yaitu $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$ sehingga persamaan (5) dan (6) dapat kita nyatakan dalam bentuk berikut

$$\left({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M}\right)A_1 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)A_2 = \frac{2F_0}{M}e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)A_1 - ({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)A_2 = 0$$

Dalam bentuk matriks akan kita peroleh

$$\begin{pmatrix} {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M} & -({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2) \\ {\omega_b}^2 - {\omega_a}^2 & {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2F_0}{M}e^{\frac{i\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana kita bisa tuliskan sebagai berikut

$$M\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2F_0}{M}e^{\frac{i\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimana M adalah sebuah matriks

$$M = \begin{pmatrix} {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M} & -({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2) \\ {\omega_b}^2 - {\omega_a}^2 & {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 \end{pmatrix}$$

Maka akan kita peroleh (menggunakan metode invers matriks)

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M} adj\ M \begin{pmatrix} \frac{2F_0}{M} e^{\frac{i\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimana

$$\det M = \begin{vmatrix} {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M} & -({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2) \\ {\omega_b}^2 - {\omega_a}^2 & {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\det M = \left({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M}\right)({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2) - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2$$

$$\det M = ({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M}({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)$$

$$adj\ M = \begin{pmatrix} {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 & {\omega_b}^2 - {\omega_a}^2 \\ -({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2) & {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M} \end{pmatrix}$$

Sehingga kita peroleh

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 & {\omega_b}^2 - {\omega_a}^2 \\ -({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2) & {\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2 + i\frac{2\gamma\omega}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2F_0}{M} e^{\frac{i\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} ({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)\frac{2F_0}{M} e^{\frac{i\pi}{2}} \\ -({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)\frac{2F_0}{M} e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

Alhasil kita peroleh

$$A_1 = \frac{i\frac{2F_0}{M}}{\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)} + i\frac{2\gamma\omega}{M}}$$

$$A_2 = \frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\frac{-i\frac{2F_0}{M}}{\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)} + i\frac{2\gamma\omega}{M}}$$

Kalikan dengan suku sekawan akan kita peroleh

$$A_1 = \frac{2F_0/M}{\dfrac{4\gamma^2{\omega_a}^2}{M^2} + \left[\dfrac{({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}\right]^2}$$

$$\left[i\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)} + \frac{2\gamma\omega}{M}\right]$$

$$A_2 = -\frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\frac{2F_0/M}{\dfrac{4\gamma^2{\omega_a}^2}{M^2} + \left[\dfrac{({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}\right]^2}$$

$$\left[i\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)} + \frac{2\gamma\omega}{M}\right]$$

Ambil nilai absolutnya, akan kita peroleh

$$A_1 = \frac{2F_0/M}{\sqrt{\dfrac{4\gamma^2\omega^2}{M^2} + \left[\dfrac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\right]^2}}$$

$$A_2 = \frac{2F_0/M}{\dfrac{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}\sqrt{\dfrac{4\gamma^2\omega^2}{M^2} + \left[\dfrac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\right]^2}}$$

Sama seperti hasil dari metode sebelumnya.

Catatan : Nilai absolut adalah nilai sebenarnya dari suatu bilangan kompleks. Jika kita mempunyai bilangan kompleks berbentuk $z = a + bi$, maka nilai absolut z adalah $z = \sqrt{a^2 + b^2}$. Mungkin kalian berpikir, mengapa bentuknya seperti persamaan phytagoras? Jawabannya adalah karena memang ini berdasarkan rumus phytagoras. Bilangan kompleks dapat digambarkan dalam suatu sistem koordinat yang disebut **Diagram Argand**. Pada diagram ini, terdapat dua sumbu seperti sistem koordinat kartesius, sumbu x sebagai sumbu dari bagian real (a) dan sumbu y sebagai bagian sumbu dari bagian imaginer (b), dan nilai absolut adalah panjang vektor dari titik asal ke titik (a,b). Silahkan kalian pelajari lebih lanjut tentang bilangan kompleks ini yah ☺☺☺.

Untuk $\omega^2 = {\omega_a}^2$, amplitudo massa m_1 adalah

$$A_1 = \frac{\frac{2F_0}{M}}{\sqrt{\frac{4\gamma^2{\omega_a}^2}{M^2} + \left[\frac{({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}\right]^2}} = \frac{\frac{2F_0}{M}}{\frac{2\gamma\omega_a}{M}}$$

$$A_1 = \frac{F_0}{\gamma\omega_a}$$

dan amplitudo massa m_2 adalah

$$A_2 = \frac{2F_0/M}{\frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}\sqrt{\frac{4\gamma^2{\omega_a}^2}{M^2} + \left[\frac{({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}\right]^2}} = \frac{\frac{2F_0}{M}}{\frac{2\gamma\omega_a}{M}}$$

$$A_2 = \frac{F_0}{\gamma\omega_a}$$

Untuk $\omega^2 = {\omega_b}^2$, amplitudo massa m_1 adalah

$$A_1 = \frac{\frac{2F_0}{M}}{\sqrt{\frac{4\gamma^2{\omega_b}^2}{M^2} + \left[\frac{({\omega_a}^2 - {\omega_b}^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_a}^2 - {\omega_b}^2}\right]^2}} = \frac{\frac{2F_0}{M}}{\frac{2\gamma\omega_a}{M}}$$

$$A_1 = \frac{F_0}{\gamma\omega_b}$$

dan amplitudo massa m_2 adalah

$$A_2 = \frac{2F_0/M}{\frac{{\omega_a}^2 - {\omega_b}^2}{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}\sqrt{\frac{4\gamma^2{\omega_b}^2}{M^2} + \left[\frac{({\omega_a}^2 - {\omega_b}^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_a}^2 - {\omega_b}^2}\right]^2}} = \frac{\frac{2F_0}{M}}{-\frac{2\gamma\omega_b}{M}}$$

$$A_2 = -\frac{F_0}{\gamma\omega_b}$$

Hasil ini sesuai dengan mode normal osilasi masing-masing massa dimana saat $\omega = \omega_a$ kita dapat hubungan $A_1 = A_2$ dan saat $\omega = \omega_b$ kita dapat hubungan $A_1 = -A_2$. Massa m_1 atau massa sebelah kiri adalah massa yang memberikan amplitudo atau yang meresonansi massa lainnya, hal ini dikarenakan massa sebelah kiri inilah yang dikenai gaya eksternal sehingga dia bergetar dan membuat massa sebelah kanan ikut bergetar pula. Kemudian massa m_2 sendiri atau massa sebelah kanan adalah massa yang diberikan amplitudo atau benda yang beresonansi. Sehingga amplitudo resonansi adalah

$$A_2 = \frac{2F_0/M}{\frac{\omega_b{}^2+\omega_a{}^2}{\omega_b{}^2-\omega_a{}^2}\left[\frac{(\omega_b{}^2+\omega_a{}^2)^2-(\omega_b{}^2-\omega_a{}^2)^2}{\omega_b{}^2+\omega_a{}^2}\right]}$$

$$A_2 = \frac{2F_0}{M}\frac{\omega_b{}^2-\omega_a{}^2}{(\omega_b{}^2+\omega_a{}^2)^2-(\omega_b{}^2-\omega_a{}^2)^2}$$

$$A_2 = \frac{F_0}{M}\frac{\omega_b{}^2-\omega_a{}^2}{2\omega_b{}^2\omega_a{}^2}$$

$$A_2 = \frac{F_0}{M}\frac{2\frac{k}{M}}{\frac{K}{M}\frac{K+2k}{M}} \Longrightarrow A_2 = \frac{F_0 k}{K(K+2k)} \ldots \text{(terbukti)}$$

Sekarang, mari kita bandingkan amplitudo saat gaya konstan $(\omega = 0)$ dengan saat resonansi.

$$\frac{A_2(\omega=0)}{|A_2|(\text{resonansi})} = \frac{\frac{F_0 k}{K(K+2k)}}{\frac{F_0}{\gamma\sqrt{K/M}}} = \frac{k}{K(K+2k)}\gamma\sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\frac{A_2(\omega=0)}{|A_2|(\text{resonansi})} = \left(\frac{k}{K+2k}\right)\frac{\gamma}{\sqrt{KM}}$$

Nilai K tidak terlalu berbeda jauh dibanding k sehingga perbandingan bisa kita abaikan

$$\frac{A_2(\omega=0)}{|A_2|(\text{resonansi})} \approx \frac{\gamma}{\sqrt{KM}}$$

Mengingat bahwa $\gamma \ll \sqrt{KM}$ maka $\gamma/\sqrt{KM} \ll 1$ sehingga

$$\frac{A_2(\omega=0)}{|A_2|(\text{resonansi})} \ll 1 \Longrightarrow |A_2|(\text{resonansi}) \gg A_2(\omega=0)$$

Dapat kita buktikan bahwa amplitudo getaran ketika resonansi jauh lebih besar daripada simpangan pegas untuk kasus gaya konstan.

c. Untuk kondisi anti-resonansi, dengan menggunakan

$$\omega^2 = \omega_{\text{anti}}{}^2 = \frac{\omega_a{}^2+\omega_b{}^2}{2}$$

Akan kita peroleh untuk amplitudo m_1

$$A_1 = \frac{2F_0/M}{\sqrt{\frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2} + \left[\frac{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2)^2 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}\right]^2}}$$

$$A_1 = \frac{2F_0}{M}\frac{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2) - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}$$

$$\left(1 + \left[\frac{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2) - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}\right]^2 \frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Subtitusi ω_{anti} akan kita peroleh

$$A_1 = \frac{2F_0}{M}\frac{0}{0 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}\left(1 + \left[\frac{0}{0 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}\right]^2 \frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = 0$$

Untuk amplitudo m_2

$$A_2 = \frac{2F_0}{M}\frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2) - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}$$

$$\left(1 + \left[\frac{{\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2}{({\omega_b}^2 + {\omega_a}^2 - 2\omega^2) - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}\right]^2 \frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Subtitusi ω_{anti} akan kita peroleh

$$A_2 = \frac{2F_0}{M}\frac{{\omega_b}^2 - {\omega_a}^2}{0 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}\left(1 + \left[\frac{0}{0 - ({\omega_b}^2 - {\omega_a}^2)^2}\right]^2 \frac{4\gamma^2\omega^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$A_2 = -\frac{2F_0}{M}$$

Kita dapatkan bahwa amplitudo massa m_1 akan menuju nol ($A_1 = 0$) dan amplitudo massa m_2 tidak nol ($A_2 = -2F_0/M$) sehingga pada sistem ini tidak terjadi fenomena anti-resonansi karena amplitudo massa yang beresonansi (m_2) tidak menuju nol.

2. Efek Pasang Surut Bumi pada Orbit Bulan

Jarak antara Bumi dengan Bulan selalu bertambah sebagai fungsi dari waktu. Hal tersebut diakibatkan oleh efek perlambatan yang diakibatkan oleh pasang-surut di Bumi yang disebabkan oleh Bulan. Efek ini ini disebut sebagai “tidal friction”.

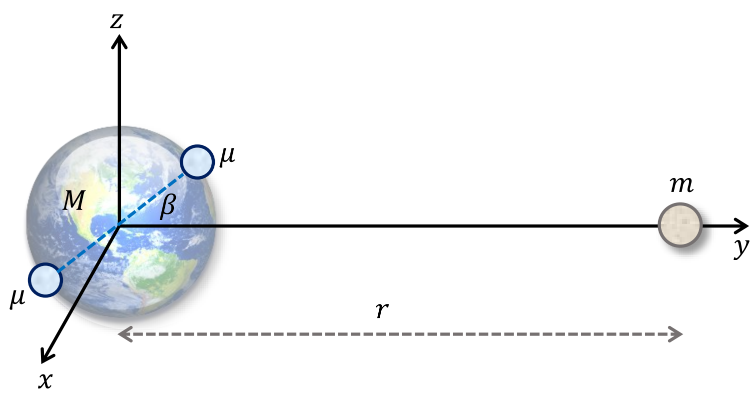
Diketahui massa Bumi adalah M, massa Bulan adalah m dan jari-jari Bumi R. Misalkan ω_0 adalah laju rotasi Bumi saat ini dan $\omega(t)$ adalah laju rotasi Bumi pada waktu t setelah saat ini. Misalkan pula r_0 adalah jarak antara pusat Bumi dan Bulan saat ini dan $r(t)$ adalah jarak antara pusat Bumi dan Bulan pada waktu t setelah saat ini. Untuk penyederhanaan, asumsikan Bulan sebagai partikel titik, Bumi berbentuk bola dengan rapat massa konstan, sumbu rotasi Bumi searah dengan sumbu revolusi orbit Bulan terhadap Bumi, dan asumsikan pula bahwa lintasan orbit Bulan mengelilingi Bumi berbentuk lingkaran. Konstanta gravitasi umum adalah G. Misalkan $v_r = dr/dt$ adalah laju perubahan jari-jari orbit Bumi-Bulan dan $\alpha = d\omega/dt$ adalah percepatan sudut gerak rotasi bumi.

a. Dengan menggunakan pusat Bumi sebagai acuan, kita bisa dapatkan hubungan:

$$\alpha = K v_r$$

Tentukan K dinyatakan dalam G, M, m, dan r!

Efek pasang-surut pada Bumi dimisalkan oleh dua buah partikel titik identik yang berada di permukaan Bumi (pada bidang equator), berorientasi pada sisi Bumi yang berseberangan dan membentuk sudut β terhadap garis yang menghubungkan pusat Bumi dengan Bulan (ligat gambar). Massa masing-masing partikel titik adalah μ. Anda dapat gunakan pendekatan $R \ll r$, dan rumus binomial $(1+x)^n \approx 1 + nx$ untuk $|x| \ll 1$.



b. Gaya gravitasi Bulan pada partikel-partikel titik akan mengakibatkan torsi pada Bumi. Tentukan torsi tersebut (dinyatakan dalam β, μ, G, M, m, R, dan r)!

c. Untuk mendapatkan prediksi kasar dari jarak akhir antara Bumi dan Bulan, kita asumsikan bahwa pada saat jarak akhir tercapai, Bumi akan berhenti berotasi pada sumbunya. Tentukan besar jarak akhir antara Bumi dan Bulan (nyatakan dalam ω_0, G, M, m, R, dan r_0)!

Bagian berikut ini adalah subsoal tambahan dari penulis sendiri dan tidak terdapat pada naskah asli soal OSN Fisika SMA 2019.

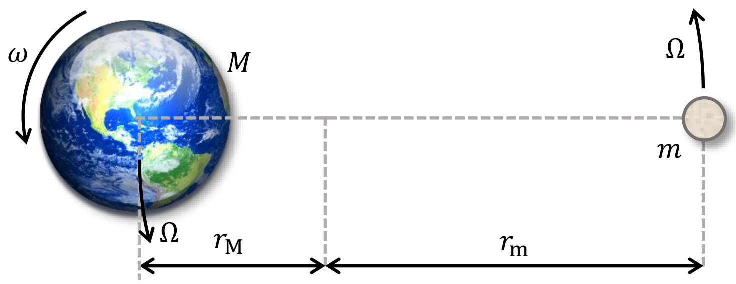
d. Tentukan persamaan kecepatan angular rotasi bumi terhadap porosnya sebagai fungsi β!

e. Tentukan persamaan kecepatan radial v_r sebagai fungsi β!

f. Saat bumi telah berhenti berotasi terhadap porosnya, bumi diberi sedikit simpangan sudut kecil δ terhadap porosnya, berapa kecepatan sudut osilasi bumi?

Solusi :

a. Dengan mengabaikan benda luar angkasa lainnya selain bumi dan bulan, maka sistem bumi-bulan ini dapat kita anggap sebagai sistem yang terisolasi. Karena pada sistem ini tidak ada gaya eksternal, maka tidak ada torsi eksternal juga tidak ada sehingga momentum sudut sistem bumi bulan bernilai konstan. Pada sistem bumi-bulan ini, bumi serta bulan bergerak melingkar dengan kecepatan sudut yang sama terhadap pusat massa sistem bumi-bulan, misal jarak bumi dan bulan masing-masing dari pusat massa sistem adalah adalah r_M dan r_m.



Dari teorema pusat massa akan kita peroleh

$$r_\mathrm{M} = \frac{mr}{M+m} \text{ dan } r_\mathrm{m} = \frac{Mr}{M+m}$$

Misal kecepatan sudut bumi-bulan terhadap pusat massanya adalah Ω. Momentum angular sistem bumi-bulan ini terdiri dari momentum akibat gerakan pusat massa bumi dan bulan serta akibat rotasi bumi terhadap porosnya. Momentum angular dari gerak rotasi bulan terhadap porosnya dapat kita abaikan karena bulan dianggap sebagai benda titik yang artinya jari-jari bulan sangat kecil dan seperti kita tahu bahwa momentum angular berbanding lurus dengan jari-jari, alhasil kontribusi rotasi bulan pada porosnya ini dapat kita abaikan dalam perhitungan momentum angular sistem bumi-bulan seluruhnya. Dengan demikian, momentum angular sistem bumi-bulan adalah

$$L = I_{\text{bumi}}\omega + (Mr_{\text{M}}{}^2 + mr_{\text{m}}{}^2)\Omega$$

Bumi dapat dianggap sebagai bola pada sehingga momen inersianya adalah $I_{\text{bumi}} = 2MR^2/5$. Gunakan nilai momen inersia ini dan subtitusi r_{M} dan r_{m} akan kita peroleh

$$L = \frac{2MR^2}{5}\omega + \left(M\left(\frac{mr}{M+m}\right)^2 + m\left(\frac{Mr}{M+m}\right)^2\right)\Omega$$

Setelah disederhanakan akan kita dapatkan

$$L = \frac{2}{5}MR^2\omega + \frac{Mm}{M+m}r^2\Omega$$

Sekarang kita cari nilai Ω. Kita tahu bahwa bumi dan bulan setimbang secara radial. Dengan demikian, dari Hukum Newton akan kita peroleh

$$\frac{GMm}{r^2} = m\Omega^2 r_{\text{m}} = M\Omega^2 r_{\text{M}}$$

$$\Omega = \left[\frac{G(M+m)}{r^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Momentum angular sistem bumi-bulan dapat kita nyatakan ulang menjadi

$$L = \frac{2}{5}MR^2\omega + Mmr^2\left[\frac{G}{(M+m)r^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \frac{2}{5}MR^2\omega + Mm\sqrt{\frac{G}{M+m}}\,r^{\frac{1}{2}}$$

Ingat kembali bahwa momentum angular ini konstan, sehingga turunan pertamanya terhadap waktu akan bernilai nol ($dL/dt = 0$), dari sini kita peroleh

$$0 = \frac{2}{5}MR^2\frac{d\omega}{dt} + Mm\sqrt{\frac{G}{M+m}}\left(\frac{1}{2}\right)r^{-\frac{1}{2}}\frac{dr}{dt}$$

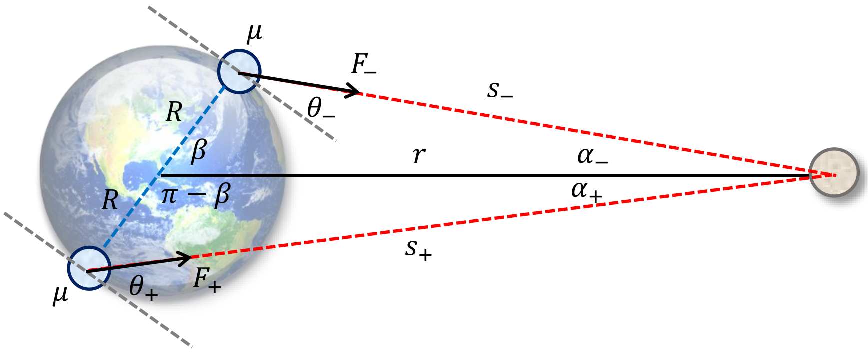
Menggunakan $d\omega/dt = \alpha$ dan $dr/dt = v_{\text{r}}$ akan kita dapatkan hubungan

$$\alpha = -\frac{5m}{4R^2}\sqrt{\frac{G}{M+m}}\frac{1}{\sqrt{r}}v_{\text{r}} \Rightarrow \alpha = Kv_{\text{r}}$$

Dengan demikian, kita dapatkan nilai K yaitu

$$K = -\frac{5m}{4R^2}\sqrt{\frac{G}{M+m}}\frac{1}{\sqrt{r}}$$

b. Untuk mencari torsi yang diberikan bulan pada bumi, kita akan menggunakan pendekatan rumus binomial $(1+x)^n \approx 1+nx$. Langkah pertama, perhatikan ilustrasi berikut ini, saya telah mendefinisikan beberapa variabel baru seperti terlihat pada gambar di bawah.



Gaya gravitasi pada masing-masing massa μ adalah

$$F_\pm = \frac{Gm\mu}{{s_\pm}^2}$$

Menggunakan dalil cosinus, kita peroleh hubungan berikut

$${s_\pm}^2 = R^2 + r^2 \pm 2Rr\cos\beta$$

Mungkin temen-temen bertanya mengapa ada tanda plus-minus, tanda ini saya gunakan untuk menyederhanakan perhitungan karena suku yang plus dan minus ini memiliki bentuk yang analog. Untuk jelasnya, tanda di atas adalah untuk tanda di atas dan tanda dibawah untuk tanda dibawah pula. Wkwk susah, simpelnya gini, ${s_+}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\beta$ dan ${s_-}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta$. Nah karena bentukanya sama, untuk menyingkat penulisan dar kedua persamaan ini, saya tuliskan menjadi ${s_\pm}^2 = R^2 + r^2 \pm 2Rr\cos\beta$.

Arah positif torsi kita pilih berlawanan arah jarum jam. Besar torsi akibat masing-masing gaya pada massa μ adalah

$$\tau_\pm = F_\pm R\cos\theta_\pm$$

Dari ilustrasi sebelumnya, kita mempunyai hubungan sudut $\theta_\pm$, $\alpha_\pm$, dan β yaitu

$$\theta_\pm = \frac{\pi}{2} - (\beta \mp \alpha_\pm)$$

Sehingga

$$\cos\theta_\pm = \sin(\beta \mp \alpha_\pm)$$

Dengan menggunakan rumus sudut gabungan pada trigonometri kita akan dapatkan

$$\cos\theta_\pm = \sin\beta\cos\alpha_\pm \mp \cos\beta\sin\alpha_\pm$$

Perhatikan ilustrasi sebelumnya lagi, kita akan dapatkan hubungan untuk r yaitu

$$r = s_\pm\cos\alpha_\pm \mp R\cos\beta$$

Sehingga kita peroleh

$$\cos\alpha_\pm = \frac{r \pm R\cos\beta}{s_\pm}$$

Dengan rumus trigonometri pula akan kita peroleh

$$\sin\alpha_\pm = \sqrt{1-\cos^2\alpha_\pm} = \sqrt{1-\frac{r^2+R^2\cos^2\beta \pm 2rR\cos\beta}{{s_\pm}^2}}$$

Kembali pada $\cos\theta_\pm$, menggunakan hasil yang telah kita dapat, kita akan peroleh

$$\cos\theta_\pm = \sin\beta\frac{r \pm R\cos\beta}{s_\pm} \mp \cos\beta\sqrt{1-\frac{r^2+R^2\cos^2\beta \pm 2rR\cos\beta}{{s_\pm}^2}}$$

$$\cos\theta_\pm = \frac{1}{s_\pm}\Big(r\sin\beta \pm R\sin\beta\cos\beta$$

$$\mp\cos\beta\sqrt{{s_\pm}^2-(r^2+R^2\cos^2\beta \pm 2rR\cos\beta)}\Big)$$

Mengingat bahwa $R^2+r^2 \pm 2Rr\cos\beta$, persamaan di atas dapat kita sederhanakan menjadi

$$\cos\theta_\pm = \frac{1}{s_\pm}\left(r\sin\beta \pm R\sin\beta\cos\beta \mp \cos\beta\sqrt{R^2(1-\cos^2\beta)}\right)$$

$$\cos\theta_\pm = \frac{1}{s_\pm}\left(r\sin\beta \underbrace{\pm R\sin\beta\cos\beta \mp R\sin\beta\cos\beta}_{0}\right)$$

Sehingga kita peroleh

$$\cos\theta_\pm = \frac{r\sin\beta}{s_\pm}$$

Mungkin temen-temen merasa bahwa ini sangat rumit yah wkwk, maafkan saya yah, ini cuman sedikit iseng aja koq hehe. Sebenarnya persamaan terakhir di atas dapat kita turunkan dengan mudah menggunakan aturan sinus. Perhatikan kembali ilustrasi sebelumnya, akan kita peroleh

$$\frac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_\pm\right)}=\frac{s_+}{\sin(\pi-\beta)}=\frac{s_-}{\sin\beta}$$

$$\frac{r}{\cos\theta_\pm}=\frac{s_\pm}{\sin\beta}$$

dan dengan mudah kita peroleh

$$\cos\theta_\pm=\frac{r\sin\beta}{s_\pm}$$

Hehe, semoga kalian menyukainya yah, ternyata benar bahwa banyak jalan menuju london, dengan analogi yang sama, banyak cara untuk menyelesaikan suatu soal. Kembali ke permasalahan utama yaitu torsi pada bumi akibat bulan. Subtitusi $F_\pm$ dan $\cos\theta_\pm$ pada persamaan torsi akan kita peroleh

$$\tau_\pm=\frac{Gm\mu}{{s_\pm}^2}R\frac{r\sin\beta}{s_\pm}$$

Subtitusi ${s_\pm}^2$

$$\tau_\pm=\frac{Gm\mu Rr\sin\beta}{(R^2+r^2\pm 2Rr\cos\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau_\pm=\frac{Gm\mu r\sin\beta}{R^2}\left(1+\left(\frac{r}{R}\right)^2\pm\frac{2r}{R}\cos\beta\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Karena $R\gg r$ maka $r/R\ll 1$ dan suku $(r/R)^2$ dapat kita abaikan

$$\tau_\pm=\frac{Gm\mu r\sin\beta}{R^2}\left(1\pm\frac{2r}{R}\cos\beta\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Masih karena $r/R\ll 1$, alhasil kita dapat menggunakan rumus pendekatan binomial, persamaan di atas akan menjadi

$$\tau_\pm=\frac{Gm\mu r\sin\beta}{R^2}\left(1\mp\frac{3r}{R}\cos\beta\right)$$

Sehingga torsi total pada bumi adalah

$$\tau_{\text{total}}=\tau_+-\tau_-$$

$$\tau_{\text{total}}=\frac{Gm\mu r\sin\beta}{R^2}\left(1-\frac{3r}{R}\cos\beta\right)-\frac{Gm\mu r\sin\beta}{R^2}\left(1+\frac{3r}{R}\cos\beta\right)$$

$$\tau_{\text{total}}=-\frac{Gm\mu r}{R^2}6\sin\beta\cos\beta$$

atau

$$\tau_{\text{total}} = -\frac{3Gm\mu r}{R^2}\sin(2\beta)$$

c. Kita gunakan persamaan pada bagian (a) akan kita dapatkan jarak akhir bumi-bulan r_{f}

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{5m}{4R^2}\sqrt{\frac{G}{M+m}}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dr}{dt}$$

$$\int_{\omega_0}^{0} d\omega = -\frac{5m}{4R^2}\sqrt{\frac{G}{M+m}}\int_{r_0}^{r_{\text{f}}} r^{-\frac{1}{2}}dr$$

$$0-\omega_0 = -\frac{5m}{4R^2}\sqrt{\frac{G}{M+m}}\left(2\sqrt{r_{\text{f}}}-2\sqrt{r_0}\right)$$

$$\sqrt{r_{\text{f}}}-\sqrt{r_0} = \frac{2\omega_0 R^2}{5m}\sqrt{\frac{M+m}{G}}$$

$$r_{\text{f}} = \left(\sqrt{r_0}+\frac{2\omega_0 R^2}{5m}\sqrt{\frac{M+m}{G}}\right)^2$$

$$r_{\text{f}} = r_0 + \frac{4{\omega_0}^2R^4(M+m)}{25m^2G} + \frac{4\omega_0 R^2}{5m}\sqrt{\frac{(M+m)r_0}{G}}$$

d. Menggunakan Hukum II Newton untuk gerak rotasi pada bumi akan kita peroleh

$$\tau_{\text{total}} = I_{\text{bumi}}\alpha$$

$$-\frac{3Gm\mu r}{R^2}\sin(2\beta) = \frac{2}{5}MR^2\frac{d\omega}{dt}\frac{d\beta}{d\beta} = \frac{2}{5}MR^2\omega\frac{d\omega}{d\beta}$$

Di sisi lain kita punya

$$\alpha = -\frac{15Gm\mu r}{2MR^4}\sin(2\beta)$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\omega d\omega = -\frac{15Gm\mu r}{4MR^4}\int_{\beta_0=0}^{\beta}\sin(2\beta)\,d(2\beta)$$

$$\frac{\omega^2}{2}-\frac{{\omega_0}^2}{2} = -\frac{15Gm\mu r}{4MR^4}\left[-\frac{\cos(2\beta)}{2}-\left(-\frac{\cos 0}{2}\right)\right]$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 - \frac{15Gm\mu r}{4MR^4}[1-\cos(2\beta)]$$

Dengan menggunakan rumus trigonometri untuk sudut rangkap, persamaan di atas dapat kita sederhanakan menjadi

$$\omega(\beta) = \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{15Gm\mu r}{2MR^4}\sin^2\beta}$$

e. Dengan menggunakan hasil pada bagian (a) kembali, akan kita peroleh

$$\alpha = -\frac{15Gm\mu r}{2MR^4}\sin(2\beta) = -\frac{5m}{4R^2}\sqrt{\frac{G}{M+m}}\frac{1}{\sqrt{r}}v_r$$

$$v_r = \frac{6\mu r}{MR^2}\sqrt{G(M+m)r}\sin(2\beta)$$

Menggunakan hasil bagian (c) kita peroleh

$$\sqrt{r} = \sqrt{r_0} + \frac{2(\omega_0 - \omega)R^2}{5m}\sqrt{\frac{M+m}{G}}$$

$$\sqrt{r} = \sqrt{r_0} + \frac{2R^2\omega_0}{5m}\sqrt{\frac{M+m}{G}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{15Gm\mu r}{2MR^4{\omega_0}^2}\sin^2\beta}\right)$$

Sehingga kita peroleh

$$v_r = \frac{6\mu r}{MR^2}\sqrt{G(M+m)}\left[\sqrt{r_0} + \frac{2R^2\omega_0}{5m}\sqrt{\frac{M+m}{G}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{15Gm\mu r}{2MR^4{\omega_0}^2}\sin^2\beta}\right)\right]\sin(2\beta)$$

f. Lihat kembali persamaan percepatan sudut bumi

$$\alpha = -\frac{15Gm\mu r_{\mathrm{f}}}{2MR^4}\sin(2\beta)$$

Untuk $\beta = \delta \ll 1$ maka $\sin 2\beta \approx 2\delta$ dan $\alpha = \ddot{\delta}$ sehingga kita peroleh

$$\ddot{\delta} + \frac{15Gm\mu r_{\mathrm{f}}}{MR^4}\delta = 0$$

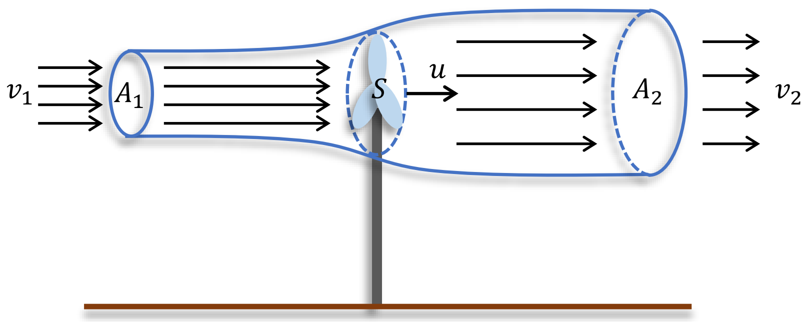
dan kecepatan sudut osilasi bumi adalah

$$\omega_{\mathrm{osilasi}} = \sqrt{\frac{15Gm\mu r_{\mathrm{f}}}{MR^4}}$$

3. Pembangkit Listrik Tenaga Bayu

Pembangkit listrik tenaga bayu/angin (PLTB) adalah sumber energi terbarukan yang semakin populer di Indonesia. Pada tanggal 2 Juli 2018, pemerintah Indonesia meresmikan PLTB komersial pertama di Indonesia di Desa Mattirotasi, Sidenreng Rappang (Sidrap) Sulawesi Selatan. Pada soal ini kita akan mempelajari prinsip pembangkitan energi listrik dengan tenaga bayu (angin) dan menghitung total energi yang dapat dihasilkan.

a. Partikel-partikel udara dengan massa jenis ρ dan kecepatan v_1 berhembus melewati suatu penampang lintang (*cross section*) baling-baling dengan luas S. Berapa total daya P_0 yang terdapat pada energi kinetik partikel-partikel yang melewati penampang lintang tersebut (dinyatakan dalam ρ, v_1, dan S)!



PLTB hanya mampu mengekstrak sebagian dari total daya tersebut. Ketika baling-baling berputar untuk mengkonversi energi, kecepatan udara yang mula-mula sebesar v_1 akan berkurang menjadi u pada penampang melintang baling-baling dan berkurang menjadi v_2 pada akhirnya. Anggap aliran udara uniform secara radial dan mengikuti bentuk "pipa melebar" seperti pada gambar. Menurut asas kontinuitas, debit aliran udara yang melewati setiap penampang melintang adalah konstan, sehingga:

$$v_1 A_1 = uS = v_2 A_2$$

Pada soal ini, anggap udara tidak kompresibel (*incompressible*) sehingga massa jenis udara tetap konstan. Interaksi baling-baling terhadap udara juga bisa dianggap uniform pada keseluruhan panjang penampang S dan abaikan segala bentuk gesekan.

b. Hitung total gaya efektif F yang dikerjakan oleh baling-baling terhadap aliran udara tersebut (dinyatakan dalam ρ, S, u, v_1, dan v_2)!

   Petunjuk: Aliran udara yang melewati baling-baling tersebut mengalami perubahan momentum karena kecepatan udara yang awalnya v_1 berkurang menjadi v_2.

c. Dari hasil pada bagian (c), hitung total daya P yang diekstrak oleh baling-baling (dinyatakan dalam ρ, S, u, v_1, dan v_2)!

d. Kita juga dapat menghitung daya baling-baling dengan metode berbeda: perubahan energi kinetik udara sebelum dan sesudah melewati baling-baling. Dengan metode ini, hitung total daya P yang diekstrak oleh baling-baling (dinyatakan dalam ρ, S, u, v_1, dan v_2)!

   Petunjuk: Hasil dari (d) tidak sama dengan hasil dari (c).

e. Berapa kecepatan udara pada penampang melintang baling-baling u (dinyatakan dalam kecepatan udara sebelum dan sesudah melewati baling-baling v_1 dan v_2)?

f. Dengan mengubah ciri-ciri pada baling-baling (misalnya jumlah, bentuk dan luas baling-baling, variasi sudut antara baling-baling dengan penampang, dan lain-lain), kita dapat memvariasikan kecepatan akhir udara v_2. Berapa nilai v_2/v_1 yang paling efektif untuk menghasilkan daya maksimum?

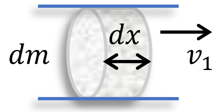
g. Berapa daya maksimum P_{max} yang dapat dihasilkan oleh kincir angin tersebut (dinyatakan dalam ρ, v_1, dan S)? Hitung juga nilai efisiensi maksimum secara teori dari kincir angin $\eta_{\mathrm{th}} = P_{\mathrm{max}}/P_0$!

   Catatan tambahan: Nilai efisiensi maksimum ini dikenal dengan nama "koefisien Betz". PLTB modern memiliki nilai efisiensi sekitar $70\% - 85\%$ dari nilai teori ini.

h. Kincir angin raksasa seperti PLTB Sidrap mampu mengahasilkan daya yang cukup besar. Menara kincir angin tersebut biasanya memiliki tinggi sekitar $80\ \mathrm{m}$ dengan panjang baling-baling sekitar $50\ \mathrm{m}$. Anggap kincir angin tersebut memiliki nilai efisiensi sekitar 75% dari nilai teori Betz, dan massa jenis udara $1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$. Berapa besar daya yang dapat dihasilkan oleh satu menara kincir angin ketika kecepatan angin sekitar $10\ \mathrm{m/s}$? Berapa dayanya jika kecepatan udara berkurang menjadi $5\ \mathrm{m/s}$?

Solusi :

a. Udara dapat kita asumsikan bergerak dalam tabung dengan luas penampang S. Kita tinjau elemen udara bermasa dm dengan panjang dx



maka dm dapat kita nyatakan sebagai

$$dm = \rho S dx$$

Kemudian energi kinetik dari elemen udara ini adalah

$$dEK = \frac{1}{2} dm{v_1}^2 \Rightarrow dEK = \frac{1}{2}\rho S {v_1}^2 dx$$

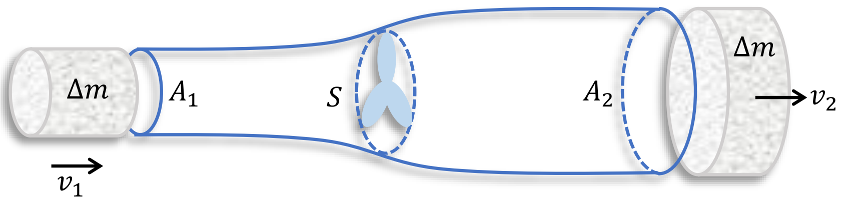
Total daya yang terdapat pada aliran udara ini adalah laju aliran energi per satuan waktu, kita dapatkan

$$\frac{dEK}{dt} = P_0 = \frac{1}{2}\rho S {v_1}^2 \frac{dx}{dt}$$

Suku dx/dt adalah jarak yang ditempuh partikel udara tiap satuan waktu yang sama dengan v_1 sehingga kita dapatkan daya total yang terdapat pada energi kinetik partikel udara yaitu

$$P_0 = \frac{1}{2}\rho S {v_1}^3$$

b. Pada bagian ini kita harus sedikit berhati-hati karena akan ada perubahan bentuk dari udara yang masuk dan keluar. Hal yang perlu kita ingat bahwa massa udara yang masuk sama dengan yang keluar yang jika massa jenisnya konstan maka volume udara saat keluar pun sama dengan yang masuk. Misalkan kita tinjau massa udara yang masuk sebesar Δm dengan kecepatan v_1 kemudian dia keluar dengan massa yang sama Δm dengan kecepatan v_2 dimana kita tahu bahwa $v_2 < v_1$ yang artinya terdapat pengurangan momentum pada massa udara ini.



Perubahan momentum udara adalah

$$\Delta p = p_2 - p_1$$
$$\Delta p = -\Delta m(v_1 - v_2)$$

Seperti sebelumnya, kita bisa menggunakan $\Delta m = \rho A_1 \Delta x_1$. Gaya adalah perubahan momentum per satuan waktu, alhasil kita peroleh gaya impulsif pada massa udara ini yaitu

$$F_{\text{udara}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\rho A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t}(v_1 - v_2)$$

Dari persamaan kontinuitas, kita punya hubungan

$$v_1 A_1 = uS \Longrightarrow A_1 = \frac{uS}{v_1}$$

Serta kita mempunyai hubungan $\Delta x_1/\Delta t = v_1$ sehingga akan kita peroleh

$$F_{\text{udara}} = -\rho \frac{uS}{v_1} v_1(v_1 - v_2) \Longrightarrow F_{\text{udara}} = -\rho uS(v_1 - v_2)$$

c. Gaya yang diberikan udara pada baling-baling adalah

$$F_{\text{baling-baling}} = -F_{\text{udara}} = \rho uS(v_1 - v_2)$$

Daya yang diekstrak oleh baling-baling dari udara sama dengan perkalian gaya yang diterima baling-baling dengan kecepatan udara yang melewati baling-baling atau

$$P = F_{\text{baling-baling}} u$$
$$P = \rho u^2 S(v_1 - v_2)$$

d. Perubahan energi kinetik elemen udara pada bagian (b) adalah

$$\Delta EK = \frac{1}{2}\Delta m {v_2}^2 - \frac{1}{2}\Delta m {v_1}^2$$
$$\Delta EK = -\frac{1}{2}\rho A_1 \Delta x_1({v_1}^2 - {v_2}^2)$$

Daya yang diserap oleh baling-baling adalah

$$P = \frac{-\Delta EK}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho \frac{uS}{v_1} v_1({v_1}^2 - {v_2}^2) \Longrightarrow P = \frac{1}{2}\rho uS({v_1}^2 - {v_2}^2)$$

e. Dari persamaan P pada bagian (c) dan (d) kita bisa dapatkan nilai u

$$\rho u^2 S(v_1 - v_2) = \frac{1}{2}\rho u S({v_1}^2 - {v_2}^2)$$
$$u = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

f. Daya yang diekstrak baling-baling dapat kita nyatakan ulang dengan mensubtitusi nilai u

$$P = \frac{1}{4}\rho S(v_1 + v_2)({v_1}^2 - {v_2}^2)$$
$$\frac{dP}{dv_2} = \frac{1}{4}\rho S(v_1 + v_2)(v_1 - 3v_2)$$
$$\frac{d^2P}{d{v_2}^2} = -\frac{1}{4}\rho S(v_1 + 6v_2)$$

Agar nilai P maksimum, maka $dP/dv_2 = 0$ sehingga

$$0 = \frac{1}{4}\rho S(v_1 + v_2)(v_1 - 3v_2)$$
$$\frac{v_2}{v_1} = -1 \text{ atau } \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3}$$

Dari uji turunan kedua akan kita peroleh bahwa

$$\left.\frac{d^2P}{d{v_2}^2}\right|_{v_2=-v_1} = \frac{5}{4}\rho S v_1 > 0 \Rightarrow v_2 = -v_1 (\text{P minimum})$$
$$\left.\frac{d^2P}{d{v_2}^2}\right|_{v_2=\frac{1}{3}v_1} = -\frac{3}{4}\rho S v_1 < 0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{3}v_1 (\text{P maksimum})$$

Sehingga kita peroleh v_2/v_1 yang paling efektif untuk menghasilkan daya maksimum yaitu

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3}$$

g. Dengan menggunakan nilai v_2/v_1 di atas, akan kita peroleh nilai daya maksimum yaitu

$$P_{\max} = \frac{1}{4}\rho S\left(v_1 + \frac{1}{3}v_1\right)\left({v_1}^2 - \frac{1}{9}{v_1}^2\right)$$
$$P_{\max} = \frac{8}{27}\rho S{v_1}^3$$

nilai efisiensi maksimum secara teori dari kincir angin adalah

$$\eta_{\text{th}} = \frac{P_{\max}}{P_0} = \frac{\frac{8}{27}\rho S {v_1}^3}{\frac{1}{2}\rho S {v_1}^3} \Longrightarrow \eta_{\text{th}} = \frac{16}{27} = 59{,}26\%$$

h. Nilai efisiensi kincir angin ini adalah

$$\eta = 75\%\eta_{\text{th}} = \frac{4}{9}$$

daya yang dihasilkan kincir angin adalah

$$P_{\text{kincir}} = \eta \frac{8}{27}\rho S {v_1}^3$$

Untuk $v_1 = 10\ \text{m/s}$, daya yang dihasilkan kincir angin adalah

$$P_{\text{kincir}} = \left(\frac{4}{9}\right)\frac{8}{27}(1{,}2\ \text{kg/m}^3)(2500\pi)(10\ \text{m/s})^3 \Longrightarrow P_{\text{kincir}} = 1{,}24\ \text{MW}$$

Untuk $v_1 = 5\ \text{m/s}$, daya yang dihasilkan kincir angin adalah

$$P_{\text{kincir}} = \left(\frac{4}{9}\right)\frac{8}{27}(1{,}2\ \text{kg/m}^3)(2500\pi)(5\ \text{m/s})^3 \Longrightarrow P_{\text{kincir}} = 0{,}16\ \text{MW}$$

4. Peluncuran Rudal dari Kutub Utara

Sebuah rudal bermassa m diluncurkan dari kutub Utara Bumi. Lokasi target penembakan (yang berada pada suatu daerah di Bumi) dapat ditentukan dengan mengatur sudut elevasi sedemikian rupa. Anggap bahwa ruadl tidak memiliki gaya dorong selama mengudara. Diketahui pada daya maksimalnya, alat peluncur rudal tersebut dapat meluncurkan rudal dengan kelajuan awal v_0. Bumi dimodelkan sebagai bola dengan jari-jari R dan bermassa M, dimana efek rotasi, gaya koriolis, serta gaya gesek atmosfer Bumi dapat diabaikan. Konstanta gravitasi umum adalah G. Persamaaan matematis kurva elips tidak diperlukan untuk mengerjakan soal ini. Tentukan:

a. Sketsa bentuk lintasn rudal! Mengapa lintasan rudal berbentuk elips?

b. Batasan untuk nilai v_0 agar rudal dapat mencapai target di permukaan bumi! Apa makna fisis untuk nilai ini?

c. Energi mekanik yang dimiliki oleh rudal dinyatakan dalam G, M, m, dan a dimana $2a$ adalah panjang sumbu mayor (sumbu terpanjang) lintasan rudal!

d. Jangkauan maksimum rudal (jarak maksimum antara lokasi peluncuran dan target rudal yang diukur di permukaan bumi)! Tentukan pula cosinus dari sudut elevasi rudal (terhadap permukaan bumi) agar dapat mencapai nilai jangkauan maksimum!

e. Ketinggian maksimum rudal diukur dari permukaan bumi untuk kasus jangkauan maksimum! Tentukan pula kelajuan ketika rudal berada di ketinggian maksimum tersebut!

f. Batas maksimum v_0 untuk kasus jangkau maksimum! Apa makna fisis untuk nilai ini?

g. Jika target berada di lokasi yang dekat dengan tempat peluncuran rudal (masih di sekitar kutub utara), berapakah sudut elevasi agar kelajuan rudal seminimum mungkin? Apa makna fisis untuk nilai ini?

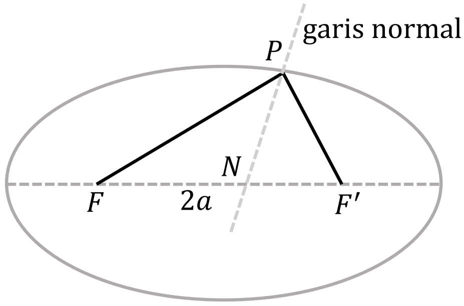
Dalam proses perancangan rudal, paling penting untuk memperhitungkan batas-batas besaran fisis di atmosfer bumi agar rudal tidak hancur/meledak di udara, salah satunya adalah besar rapat muatan listrik per satuan volume (ρ) di atmosfer

Bumi. Atmosfer bumi dimodelkan sebagai medium yang memiliki konduktivitas listrik (σ) yang bervariasi terhadap ketinggian dari permukaan bumi (h) dengan fungsi $\sigma(h) = k_1 + k_2 h^2$, dimana k_1 dan k_2 adalah suatu konstanta fisis yang berkaitan dengan sifat-sifat elektrik yang dimiliki atmosfer. Rudal dirancang agar tahan melalui medium dengan besar rapat muatan persatuan volume maksimum sebesar ρ_{m}. Diketahui di permukaan bumi terdapat medan listrik arah radial sebesar E_0 dan permitivitas atmosfer bumi seragam sebesar ε_0.

h. Tentukan besar ρ sebagai fungsi dari ketinggian (h)!

i. Tentukan besar ρ_{m} untuk rudal dengan kasus jangkauan maksimum jika alat peluncur rudal memiliki daya maksimum yang dapat meluncurkan rudal dengan kelajuan awal $v_0 = \sqrt{3GM/4R}$!

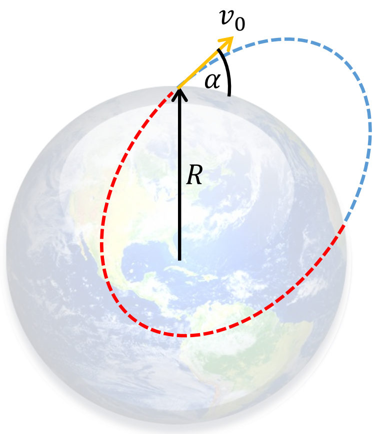
Petunjuk: Kalian dapat menggunakan sifat-sifat dasar elips berikut.



- Jumlah jarak suatu titik pada elips ke masing-masing titik fokus selalu sama dengan panjang sumbu mayor (sumbu terpanjang) elips ($PF + PF' = 2a$).
- Sudut-sudut yang dibentuk garis normal suatu titik pada elips ke garis yang menghubungkan titik tersebut ke masing-masing titik fokus selalu sama ($\angle FPN = \angle F'PN$).

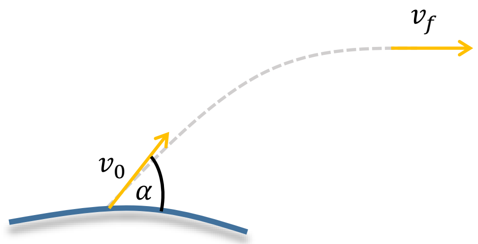
Solusi :

a. Berikut adalah ilustrasi lintasan rudal



Lintasan rudal berbentuk elips karena gaya sentral dari pusat bumi yang tidak tegak lurus kecepatan peluncuran rudal serta nilai kecepatan awal yang tidak memenuhi syarat untuk orbit berbentuk lintasan melingkar. Lintasan rudal tidak mungkin berbentuk parabola atau hiperbola karena untuk mencapai lintasan ini rudal harus diluncurkan dengan kecepatan yang melebihi kecepatan lepas dari medan gravitasi bumi yang mengakibatkan rudal tidak akan kembali lagi ke permukaan bumi. Syarat agar lintasan orbit rudal melingkar adalah $\vec{v}_0 = v_{0\theta}\hat{\theta}$ dengan $v_{0\theta} = \sqrt{GM/R}$ dan hal ini jelas tidak terpenuhi karena kecepatan rudal memiliki komponen radial dan tangensial, $\vec{v}_0 = v_{0r}\hat{r} + v_{0\theta}\hat{\theta}$.

b. Rudal harus kembali ke permukaan bumi. Energi sistem kekal. Kita tinjau kondisi saat baru meluncur dan saat sudah di luar angkasa.



Syarat agar rudal bisa mencapai target di permukaan bumi adalah kecepatan awalnya menjamin bahwa rudal di posisi yang sangat jauh sekalipun akan tetap kembali ke permukaan bumi. Menggunakan Hukum Kekekalan Energi Mekanik akan kita peroleh

$$\frac{1}{2}m{v_{0,\mathrm{Kritis}}}^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{f}}}^2\Big|_{v_{\mathrm{f}}\to 0}-\frac{GMm}{r}\Big|_{r\to\infty}$$

$$v_{0,\mathrm{Kritis}}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

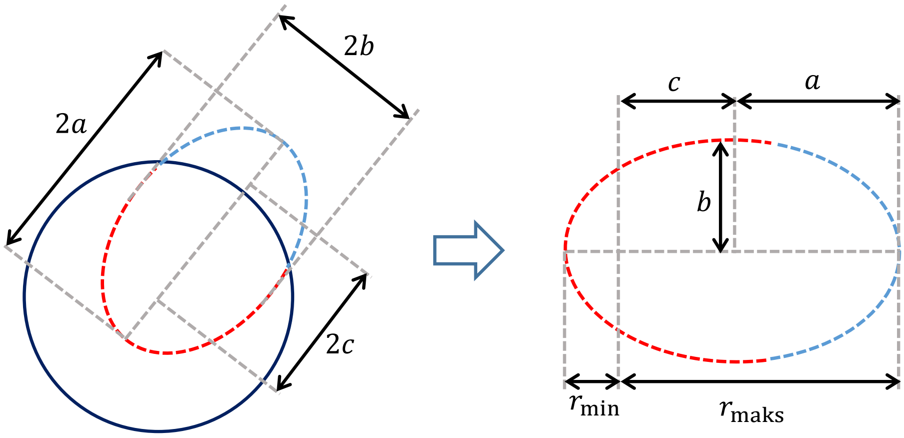
Dimana $v_{0,\mathrm{Kritis}}$ adalah kecepatan minimum untuk lepas dari medan gravitasi bumi. Dengan demikian, kecepatan awal rudal tidak boleh melebihi nilai ini

$$v_0<v_{0,\mathrm{Kritis}}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

c. Energi mekanik sistem adalah

$$EM=\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{GMm}{R}$$

Perhatikan lintasan elips dari rudal berikut!



Untuk sementara, kita mengasumsikan bahwa rudal bergerak dalam lintasan orbit elips yang utuh. Saat rudal mencapai posisi terjauhnya dari titik fokus (pusat bumi), kecepatannya akan tegak lurus dengan vektor posisinya terhadap pusat bumi. Dari sini, kita bisa mendapatkan nilai r_{min} dan r_{maks} dan pula a, b, serta c. Momentum angular rudal konstan, dari sini kita peroleh

$$mv_0R\cos\alpha = mvr \Rightarrow v = v_0\frac{R}{r}\cos\alpha$$

Kemudian dari konservasi energi mekanik akan kita peroleh pula

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Subtitusi $v = v_0(R/r)\cos\alpha$

$${v_0}^2\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\cos^2\alpha\right) = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\cos^2\alpha = \frac{2GM}{{v_0}^2R}\left(1 - \frac{R}{r}\right)$$

Kita gunakan penyederhanaan $k = 2GM/{v_0}^2R$ sehingga kita peroleh

$$r^2 - R^2\cos^2\alpha = kr^2 - kRr$$

$$(k-1)r^2 - kRr \pm R^2\cos^2\alpha = 0$$

Dengan rumus kuadrat, akan kita peroleh nilai r

$$r = \frac{kR \pm \sqrt{k^2R^2 - 4(k-1)R^2\cos^2\alpha}}{2(k-1)}$$

$$r_{\text{min}} = R\frac{k - \sqrt{k^2 - 4(k-1)\cos^2\alpha}}{2(k-1)} \text{ dan } r_{\text{maks}} = R\frac{k + \sqrt{k^2 - 4(k-1)\cos^2\alpha}}{2(k-1)}$$

Sekarang kita bisa dapatkan nilai a, b, dan c

$$2a = r_{\text{maks}} + r_{\text{min}} \Longrightarrow a = \frac{R}{2}\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

$$2c = r_{\text{maks}} - r_{\text{min}} \Longrightarrow a = \frac{R}{2}\frac{\sqrt{k^2 - 4(k-1)\cos^2\alpha}}{k-1}$$

$$b = \sqrt{c^2 - b^2} \Longrightarrow b = R\frac{\cos\alpha}{\sqrt{k-1}}$$

Dari a akan kita peroleh

$$2ak - 2a = Rk$$

$$k(2a - R) = 2a$$

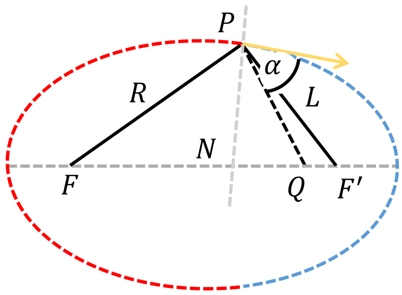
$$\frac{2GM}{{v_0}^2 R}(2a - R) = 2a \Longrightarrow \frac{{v_0}^2}{2} = \frac{GM}{2aR}(2a - R)$$

Kembali ke persamaan energi mekanik sistem akan kita peroleh

$$EM = \frac{GMm}{2aR}(2a - R) - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{2a} - \frac{GMm}{R}$$

$$EM = -\frac{GMm}{2a}$$

d. Sekarang perhatikan ilustrasi berikut!



Gambar di atas adalah penyederhanaan dari lintasan orbit rudal. Titik P adalah titik peluncuran rudal yaitu kutub utara bumi. Titik F dan F' adalah titik fokus elips dimana F adalah titik pusat bumi (pusat bumi harus terletak di salah satu titik fokus elips). Garis berwarna abu-abu adalah garis normal terhadap elips. Garis PQ adalah garis singgung permukaan bumi, garis ini tegak lurus permukaan bumi. Sudut α sendiri adalah sudut peluncuran rudal.

Jangkauan rudal terhadap permukaan bumi dapat kita nyatakan sebagai berikut

$$s = 2R\theta$$

dengan θ adalah sudut $\angle PFN$. Dari petunjuk soal (terdapat pada bagian akhir soal), kita mempunyai akan mempunyai hubungan

$$R + L = 2a \Longrightarrow L = 2a - R$$

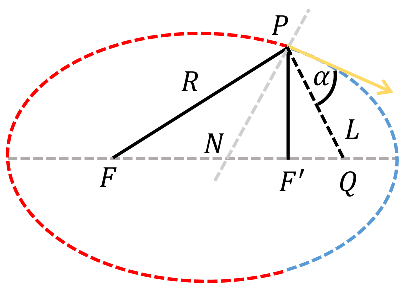
Sebelumnya kita juga tahu bahwa sudut $\angle FPN$ dan $\angle F'PN$ sama atau $\angle FPN = \angle F'PN$. Karena arah kecepatan awal rudal (garis jingga) tegak lurus dengan garis normal PN maka kita dapatkan bahwa sudut $\angle FPN = \alpha = \angle F'PN$. Misalkan sudut $\angle PQN = \phi$, menggunakan aturan sinus akan kita peroleh

$$\frac{L}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\phi} \Longrightarrow \sin\theta = \left(\frac{2a}{R} - 1\right)\sin\phi$$

Dengan mensubtitusi nilai a, persamaan di atas dapat kita nyatakan ulang sebagai berikut

$$\sin\theta = \left(\frac{k}{k-1} - 1\right)\sin\phi \Longrightarrow \sin\theta = \frac{\sin\phi}{k-1}$$

Kita tahu bahwa nilai k akan konstan selama untuk nilai v_0 tertentu sehingga θ hanya bergantung pada sudut ϕ. Agar sudut θ maksimum atau $\sin\theta$ maksimum (ingat bahwa batas sudut θ adalah $0 \leq \theta \leq \pi/2$) maka $\sin\phi$ harus maksimu pula atau $\sin\phi = 1$ dan kita dapat bahwa θ akan maksimum saat $\phi = \pi/2$. Lintasan orbir rudal dapat kita sederhanakan sebagai berikut



dimana segitiga PFF' adalah segitiga siku-siku. Maka nilai $\sin\theta$ untuk $\theta = \theta_{\text{maks}}$ bisa kita dapatkan dengan mudah yaitu

$$\sin\theta_{\text{maks}} = \frac{1}{k-1} \Longrightarrow \theta_{\text{maks}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{k-1}\right)$$

Sehingga jangkauan rudal adalah

$$s_{\text{maks}} = 2R\theta_{\text{maks}} \Longrightarrow s_{\text{maks}} = 2R\sin^{-1}\left(\frac{1}{k-1}\right), k = \frac{2GM}{{v_0}^2 R}$$

Karena segitiga PFF' adalah segitiga siku-siku pula, kita bisa dapatkan sudut α untuk kasus jangkauan maksimum ($\alpha = \alpha_{\text{m}}$) dengan mudah yaitu

$$\cos 2\alpha_{\text{m}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\text{maks}}\right) = \sin\theta_{\text{maks}} = \frac{1}{k-1}$$

$$2\cos^2\alpha_\mathrm{m} - 1 = \frac{1}{k-1}$$

$$2\cos^2\alpha_\mathrm{m} = \frac{k}{k-1} \Longrightarrow \cos\alpha_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{k}{2(k-1)}}, k = \frac{2GM}{{v_0}^2 R}$$

Sampai di sini, jawaban kita telah selesai. Dapat temen-temen lihat bahwa dengan meninjau secara geometri, kita bisa dapatkan hasil ini mudah. Hal inilah yang menjadi alasan bahwa pemahaman kita tentang geometri sangat penting dalam ilmu fisika. Pada ajang internasional seperti IphO dan AphO, jawaban seperti inilah yang akan diberi nilai lebih dibanding jawaban yang banyak menggunakan ilmu kalkulus. Namun, di luar daripada itu semua, baik ilmu geometri dan ilmu kalkulus masing-masing punya kelebihan dan kekurangannya masing-masing. Kedua ilmu ini saling melengkapi satu sama lain, jadi kita sendirilah yang harus tau kapan menggunakannya.

e. Ketinggian maksimum rudal diukur dari permukaan bumi adalah

$$H_\mathrm{maks} = r_\mathrm{maks} - R$$

Sebelumnya kita hitung dulu nilai r_maks untuk kasus jangkau maksimum

$$r_\mathrm{maks} = R\frac{k + \sqrt{k^2 - 4(k-1)\cos^2\alpha_\mathrm{m}}}{2(k-1)}$$

$$r_\mathrm{maks} = R\frac{k + \sqrt{k^2 - 2k}}{2(k-1)}$$

Sehingga kita peroleh

$$H_\mathrm{maks} = R\left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 2k}}{2(k-1)} - 1\right), k = \frac{2GM}{{v_0}^2 R}$$

Kelajuan rudal di posisi ini adalah

$$v_{r_\mathrm{maks}} = v_0\frac{R}{r_\mathrm{maks}}\cos\alpha_\mathrm{m}$$

$$v_{r_\mathrm{maks}} = v_0\frac{R}{R\frac{k + \sqrt{k^2 - 2k}}{2(k-1)}}\sqrt{\frac{k}{2(k-1)}}$$

dengan sedikit penyederhanaan akan kita peroleh

$$v_{r_{\text{maks}}} = v_0 \frac{\sqrt{2k(k-1)}}{k+\sqrt{k^2-2k}}, k = \frac{2GM}{{v_0}^2 R}$$

f. Batas maksimum v_0 dapat kita tentukan dengan meninjau nilai $v_{r_{\text{maks}}}$. Agar rudal tetap dapat kembali ke bumi dan mencapai targetnya, maka $v_{r_{\text{maks}}}$ harus lebih dari nol

$$v_{r_{\text{maks}}} > 0$$

$$\frac{\sqrt{2k(k-1)}}{k+\sqrt{k^2-2k}} > 0$$

$$k - 1 > 0$$

$$\frac{2GM}{{v_0}^2 R} > 1 \Longrightarrow v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Longrightarrow v_{0,\text{maks}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Sama seperti bagian (b), $v_{0,\text{maks}}$ ini adalah kecepatan minimum untuk lepas dari medan gravitasi bumi.

g. Jika target terletak di kutub utara, maka kecepatan peluncuran rudal tidak perlu terlalu besar (v_0 kecil) sehingga

$$k = \frac{2GM}{{v_0}^2 R} \gg 1$$

Sehingga sudut elevasi rudal untuk jangkau maksimum adalah

$$\cos\alpha_{\text{m}} = \sqrt{\frac{k}{2(k-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{k}}_{0}}}$$

$$\cos\alpha_{\text{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha_{\text{m}} = \frac{\pi}{4}$$

Lintasan orbit rudal akan menjadi parabola dan permukaan bumi dapat dianggap datar (karena lokasi tempat peluncuran dan target tidak terlalu jauh). Sudut $\alpha_{\text{m}} = \pi/4$ adalah sudut agar jangkauan bernilai maksimum untuk gerak parabola dengan berapapun nilai v_0 yang cukup kecil ($v_0 > 0$).

h. Atmosfer bumi dapat dianggap sebagai konduktor dan terdapat rapat muatan di dalamna yang dapat bergerak bebas atau mengalir. Persamaan kontinuitas untuk aliran muatan adalah

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Dengan $\vec{J}$ vektor rapat arus pada atmosfer, ρ adalah rapat muatan di atmosfer, dan $d\rho/dt$ adalah aliran muatan di atmosfer setiap waktu. Saat muatan di atmosfer berada dalam kondisi jenuh atau bisa kita katakan "diam" atau bahasa keren dalam ilmu fisikanya "kondisi *steady state*", tidak ada lagi aliran muatan pada atmosfer sehingga $d\rho/dt = 0$. Dengan demikian kita peroleh

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Suku $\nabla \cdot \vec{J}$ disebut sebagai **Divergensi** dari $\vec{J}$ dimana ∇ (dibaca "del" atau "nabla") sendiri adalah **Operator Gradien**. Untuk koordinat bola, bentuk ∇ adalah

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Bentuk $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$, dan $\partial/\partial\phi$ disebut sebagai turunan parsial. Turunan parsial memiliki karakter yang sama dengan turunan biasa namun semua variabel selain yang diturunkan dianggap sebagai konstanta.

Dari Hukum Ohm untuk aliran arus,

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

Kita peroleh

$$\nabla \cdot \sigma\vec{E} = 0$$

$$\sigma\nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla\sigma = 0 \ldots (*)$$

Dari persamaan Maxwell kita tahu bahwa

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Kemudian dari soal kita tahu bahwa konduktivitas atmosfer atau σ bervariasi terhadap ketinggian, $\sigma(h) = k_1 + k_2h^2$. Kita gunakan $r = R + h$ dengan demikian $\partial/\partial r = \partial/\partial h$ sehingga kita peroleh

$$\nabla\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial h}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}\right)(k_1 + k_2h^2)$$

Karena σ hanya fungsi dari h, maka suku kedua dan ketiga bernilai nol

$$\nabla\sigma = \frac{\partial(k_1 + k_2h^2)}{\partial h}\hat{r} = \frac{d(k_1 + k_2h^2)}{dh}\hat{r} \Longrightarrow \nabla\sigma = 2k_2h\hat{r}$$

Mengingat bahwa bumi berbentuk bola, maka medan di permukaan bumi dapat kita nyatakan sebagai

$$\vec{E}_{\text{permukaan}} = -E_0\hat{r} = \frac{kQ}{R^2}\hat{r} \Longrightarrow kQ = -E_0R^2$$

Tanda negatif mendakan bahwa arah medan magnet di permukaan bumi adalah menuju pusat bumi. Dengan demikian, medan listrik akibat bumi (bumi dapat dianggap muatan titik dengan muatan total Q) pada jarak r dari pusat bumi adalah

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} = -E_0\left(\frac{R}{r}\right)^2\hat{r}$$

Menggunakan $r = R + h$, persamaan di atas dapat kita nyatakan ulang sebagai berikut

$$\vec{E}(h) = -E_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2\hat{r}$$

Kembali ke persamaan (*), subtitusi hasil-hasil yang telah kita dapatkan, maka persamaan (*) dapat kita nyatakan ulang sebagai berikut

$$\sigma\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \left(-E_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2\hat{r}\right)\cdot(2k_2h\hat{r}) = 0$$

$$\rho(h) = \frac{2k_2\varepsilon_0E_0h}{k_1+k_2h^2}\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

i. Pertama kita hitung dulu nilai k. Untuk nilai $v_0 = \sqrt{3GM/4R}$ akan kita peroleh

$$k = \frac{2GM}{\frac{3GM}{4R}R} \Longrightarrow k = \frac{8}{3}$$

Ketinggian maksimum rudal akan menjadi

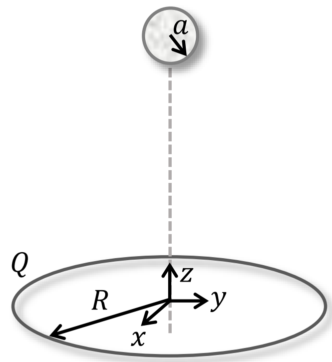
$$H_{\text{maks}} = R\left(\frac{\frac{8}{3}+\sqrt{\frac{64}{9}-\frac{16}{3}}}{2\left(\frac{8}{3}-1\right)} - 1\right) \Longrightarrow H_{\text{maks}} = \frac{R}{5}$$

Maka untuk $h = H_{\text{maks}}$ dan $\rho(H_{\text{maks}}) = \rho_{\text{m}}$ akan kita peroleh

$$\rho_{\text{m}} = \frac{2k_2\varepsilon_0E_0\frac{R}{5}}{k_1+k_2\frac{R^2}{25}}\left(\frac{R}{R+\frac{R}{5}}\right)^2 \Longrightarrow \rho_{\text{m}} = \frac{125k_2\varepsilon_0E_0R}{450k_1+18k_2R^2}$$

5. Cincin dan Bola Konduktor

Sebuah cincin berjari-jari R memiliki muatan total Q yang terdistribusi secara merata dan awalnya cincin ditahan sehingga tidak dapat bergerak. sebuah bola konduktor dengan radius a ($a \ll R$) memiliki massa m dan tidak bermuatan. Akan dipelajari efek bola di dekat cincin pada vakum. Sistem koordinat dipilih sehingga pusat koordinat berada di pusat cincin dan sumbu z tegak lurus dengan bidang cincin. **Abaikan efek gravitasi.**



a. Awalnya bola terletak sangat jauh dari cincin. Hitung medan listrik akibat cincin pada suatu titik $P\ (0,0,z)$!
b. Bola kemudian didekatkan dengna cincin sehingga suatu saat pusat bola berada di titik P. Untuk mempermudah perhitungan, bola konduktor dapat digantikan dengan 2 muatan bayangan q_1 dan q_2 yang terletak pada sumbu z. Muatan q_1 merupakan muatan titik, tetapi q_2 merupakan muatan yang tersebar merata pada sebuah cincin dengan jari-jari r. Tentukan nilai muatan q_1 dan q_2, besar r serta posisi kedua muatan bayangan, berturut-turut z_1 dan z_2 (diukur dari pusat cincin)! Nyatakan jawaban dalam Q, R, a, dan z.
c. Hitung jarak maksimum q_1 dan q_2, yakni Δz_{maks} selama pusat bola berada pada sumbu z. Hitung juga radius maksimum q_2, yakni r_{maks}! Tunjukkan bahwa kedua besaran tersebut jauh lebih kecil dibanding a!
d. Perkirakan gaya antara cincin dan bola sebagai fungsi z!
e. Tentukan semua posisi kesetimbangan bola serta jenis kesetimbangan pada setiap titik tersebut. Bila suatu titik berada dalam kesetimbangan stabil, tentukan frekuensi osilasi kecil di sekitar titik kesetimbangan tersebut.

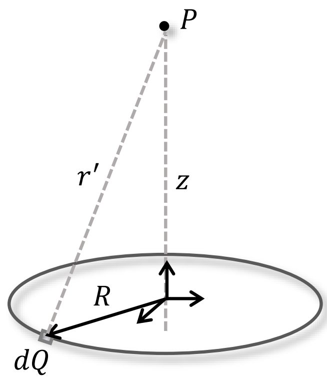
f. Sekrang cincin dapat bergerak bebas dan memiliki massa M. Mula-mula bola didekatkan di salah satu titik kesetimbangan stabil dan diberi kecepatan awal v_0 pada arah sumbu z. Bila v_0 cukup besar ($v_0 \geq v_{\text{esc}}$), bola dapat lepas dari pengaruh medan listrik cincin. Tentukan kecepatan bola dan cincin setelah waktu yang sangat lama bila $v_0 = v_{\text{esc}}$!

Solusi :

a. Kita tinjau elemen muatan dari cincin yaitu dQ yang berbentuk busur kecil dengan sudut $d\theta$ sehingga panjang busur kecil ini adalaha $ds = Rd\theta$, maka besar elemen muatan ini adalah

$$dQ = \lambda ds = \frac{Q}{2\pi R} R d\theta \Longrightarrow dQ = \frac{Q}{2\pi} d\theta$$

Sekarang kita tinjau titik P yang berjarak z dari pusat cincin



$$r' = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Potensial listrik di titik P akibat elemen muatan dQ adalah

$$dV = \frac{kdQ}{r'} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Kita integrasi persamaan di atas untuk seluruh area cincin ($\theta = 0$ sampai $\theta = 2\pi$) akan kita peroleh

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Medan listrik adalah negatif dari gradien potensial listrik, dengan demikian kita peroleh

$$\vec{E} = -\nabla V$$

dengan ∇ adalah operator gradien. Untuk sistem koordinat kartesius, kita gunakan

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Sehingga medan listrik akibat cincin adalah

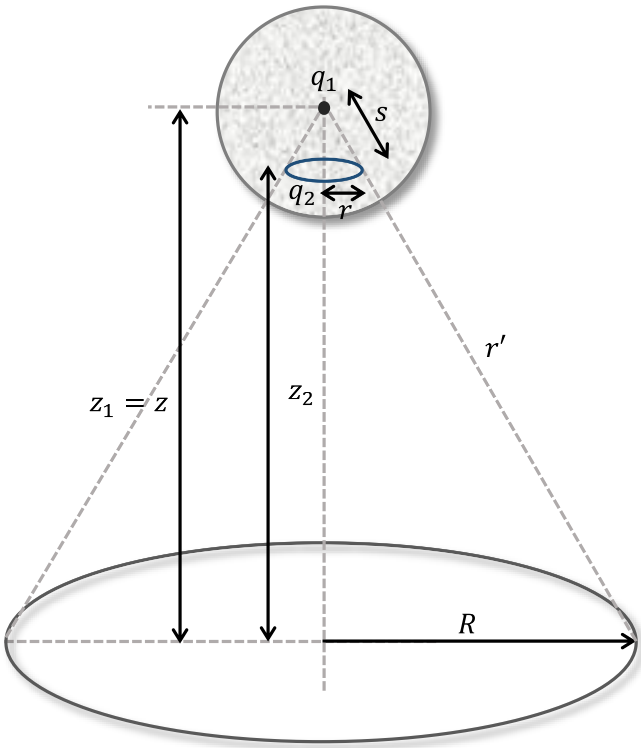
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\vec{E} = -kQ\frac{d}{dz}(R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{k}$$

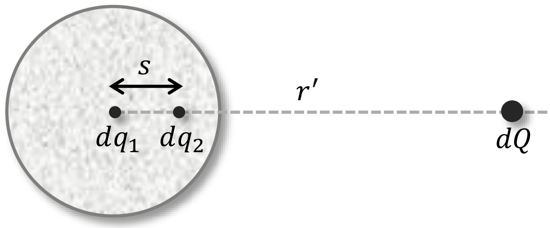
$$\vec{E}(z) = -kQ\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(0 + 2z)\hat{k}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

b. Cincin akan mempengaruhi bola konduktor sehingga sedemikian hingga muatan pada bola konduktor tersebar tidak merata namun potensial di permukaan bola konduktor seluruhnya bernilai sama karena permukaan konduktor bersifat equipotensial. Berikut adalah posisi muatan bayangan sebagai pengganti dari perseberan muatan bola yang tidak merata



Bola konduktor tidak di-*ground* kan sehingga potensial di permukaanya tidak bernilai nol. Namun karena bersifat equipotensial, potensial permukaan bola ini dapat digantikan oleh muatan tunggal q_1 yang tepat berada di pusat bola konduktor. Sekarang mengapa ada muatan bayangan berbentuk cincin juga? Sebenarnya jika kita tinjau elemen cincin dQ, elemen cincin ini akan memberikan efek pada bola konduktor dan dapat efeknya ini dapat digantikan oleh satu buah elemen muatan juga yaitu dq_2. Hal ini akan terjadi pada seluruh elemen muatan dQ pada cincin sedemikian hingga akan terbentuk cincin kecil juga sebagai muatan bayangan dari bola konduktor.



Dengan mengabaikan dq_1 kita dapatkan potensial di permukaan bola bernilai nol. Dengan meninjau potensial di titik terdekat dan terjauh pada permukaan dari elemen muatan dQ akan kita peroleh

$$V_{\text{terdekat}} = 0 = \frac{kdQ}{r'-a} + \frac{kdq_2}{a-s} \Longrightarrow \frac{dQ}{dq_2} = \frac{r'-a}{a-s}$$

$$V_{\text{terjauh}} = 0 = \frac{kdQ}{r'+a} + \frac{kdq_2}{a+s} \Longrightarrow \frac{dQ}{dq_2} = \frac{r'+a}{a+s}$$

Dengan demikian, kita akan dapatkan

$$\frac{r'-a}{a-s} = \frac{r'+a}{a+s}$$

$$(r'-a)(a+s) = (r'+a)(a-s)$$

$$r'a + r's - a^2 - as = r'a - r's + a^2 - as$$

$$2r's = 2a^2 \Longrightarrow s = \frac{a^2}{r'}$$

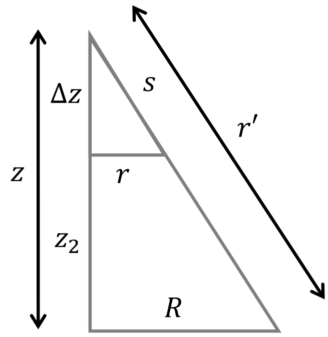
Akan kita dapatkan pula dq_2

$$\frac{dQ}{dq_2} = \frac{r'+a}{a+\frac{a^2}{r'}} = \frac{r'+a}{\frac{a}{r'}(r'+a)} \Longrightarrow dq_2 = \frac{a}{r'}dQ \Longrightarrow q_2 = \frac{a}{r'}Q$$

Bola konduktor tidak bermuatan sehingga

$$q_1 + q_2 = 0 \Longrightarrow q_1 = -q_2 = -\frac{a}{r'}Q$$

Kita dapatkan pula bahwa $z_1 = z$. Selanjutnya kita akan mencari z_2 dan r. Perhatikan kesebangunan dari "kerucut" yang dibentuk oleh sistem cincin konduktor ini.



Dari kesebangunan akan kita peroleh untuk r

$$\frac{r}{R} = \frac{s}{r'} \Longrightarrow r = \frac{a^2}{r'^2}R$$

Demikian pula untuk z_2

$$\frac{z - z_2}{z} = \frac{s}{r'} \Longrightarrow z_2 = z\left(1 - \frac{a^2}{r'^2}\right)$$

Menggunakan $r' = \sqrt{R^2 + z^2}$ akan kita peroleh

$$q_2 = -q_1 = \frac{a}{\sqrt{R^2 + z^2}}Q$$

$$z_1 = z$$

$$z_2 = z\left(1 - \frac{a^2}{R^2 + z^2}\right)$$

$$r = \frac{a^2}{R^2 + z^2}R$$

c. Menggunakan hasil yang telah kita temukan pada bagian sebelumnya, akan kita dapatkan

$$\Delta z = z_1 - z_2 = \frac{a^2}{R^2 + z^2}z$$

$$r = \frac{a^2}{R^2 + z^2}R$$

Nilai maksimum z akan kita dapatkan saat

$$\frac{d(\Delta z)}{dz}=0=\frac{a^2}{R^2+z^2}-\frac{a^2 z}{(R^2+z^2)^2}(2z)$$

$$1-\frac{2z^2}{R^2+z^2}=0\Longrightarrow z=\pm R$$

Sehingga nilai maksimumnya adalah

$$\Delta z_{\text{maks}}=\frac{a^2}{2R}$$

Untuk r, nilainya akan maksimum saat $z=0$ sehingga

$$r_{\text{maks}}=\frac{a^2}{R}$$

untuk nilai $a\ll R$ maka

$$\Delta z_{\text{maks}}=\frac{a}{2R}a\Longrightarrow \Delta z_{\text{maks}}\ll a$$

$$r_{\text{maks}}=\frac{a}{R}a\Longrightarrow r_{\text{maks}}\ll a$$

d. Gaya interaksi antara bola konduktor dan cincin dapat kita sederhanakan sebagai bentuk interaksi antara cincin dengan masing-masing muatan bayangan dari bola konduktor. Saya gunakan F_1 sebagai gaya interaksi dari Q ke q_1 dan F_2 sebagai gaya interaksi dari Q ke q_2. Dengan demikian akan kita peroleh

$$\vec{F}_1=\vec{E}(z_1)q_1=\frac{kQz_1}{(R^2+{z_1}^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{a}{\sqrt{R^2+z^2}}Q\hat{k}\Longrightarrow \vec{F}_1=\frac{kQ^2za}{(R^2+z^2)^2}\hat{k}$$

Untuk gaya dari cincin pada muatan bayangan cincin, karena jari-jari cincin sangat kecil $r_{\text{maks}}\ll a$, maka muatan bayangan cincin ini dapat kita anggap sebagai muatan titik sehingga

$$\vec{F}_2=\vec{E}(z_2)q_2=\frac{kQz_2}{(R^2+{z_2}^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{-a}{\sqrt{R^2+z^2}}Q\hat{k}\Longrightarrow \vec{F}_2=-\frac{kQ^2z_2a}{(R^2+{z_2}^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{R^2+z^2}}\hat{k}$$

Sehingga gaya total yang diberikan cincin pada bola konduktor adalah

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$

$$\vec{F}=\frac{kQ^2za}{(R^2+z^2)^2}\hat{k}-\frac{kQ^2z_2a}{(R^2+{z_2}^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{R^2+z^2}}\hat{k}$$

$$\vec{F}=\frac{kQ^2a}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{z_2}{(R^2+{z_2}^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{k}$$

Mengingat $z_2 = z[1 - a^2/(R^2 + z^2)]$ serta $r \ll a$, kita bisa lakukan beberapa penyederhanaan berikut

$$R^2 + {z_2}^2 = R^2 + z^2 \left[\frac{R^2 + z^2 - a^2}{R^2 + z^2}\right]^2$$

$$R^2 + {z_2}^2 = R^2 + z^2 \frac{(R^2 + z^2)^2 + a^4 - 2a^2(R^2 + z^2)}{(R^2 + z^2)^2}$$

Kemudian persamaan di atas kita blaik

$$\frac{1}{R^2 + {z_2}^2} = \frac{(R^2 + z^2)^2}{R^2(R^2 + z^2)^2 + z^2(R^2 + z^2)^2 + z^2a^4 - 2a^2z^2(R^2 + z^2)}$$

$$\frac{1}{R^2 + {z_2}^2} \approx \frac{(R^2 + z^2)^2}{(R^2 + z^2)^3 - 2a^2z^2(R^2 + z^2)}$$

$$\frac{1}{R^2 + {z_2}^2} = \frac{1}{R^2 + z^2} \frac{1}{1 - \frac{2a^2z^2}{(R^2 + z^2)^2}}$$

Kembali ke bentuk aslinya akan kita peroleh

$$\frac{z_2}{(R^2 + {z_2}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{a^2}{R^2 + z^2}\right) \left(1 - \frac{2a^2z^2}{(R^2 + z^2)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{z_2}{(R^2 + {z_2}^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{a^2}{R^2 + z^2}\right) \left(1 + \frac{3a^2z^2}{(R^2 + z^2)^2}\right)$$

$$\frac{z_2}{(R^2 + {z_2}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{3a^2z^2}{(R^2 + z^2)^2} - \frac{a^2}{R^2 + z^2} + \frac{3a^3z^2}{(R^2 + z^2)^3}\right)$$

$$\frac{z_2}{(R^2 + {z_2}^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{3a^2z^2 - a^2R^2 - a^2z^2}{(R^2 + z^2)^2}\right)$$

$$\frac{z_2}{(R^2 + {z_2}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{a^2(2z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^2}\right)$$

Okey, proses penyederhanaan selesai. Selanjutnya kita kembali ke persamaan gaya pada bola konduktor

$$\vec{F} = \frac{kQ^2a}{\sqrt{R^2 + z^2}} \left(\frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{a^2(2z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^2}\right)\right) \hat{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{kQ^2a^3z(2z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^4} \hat{k}$$

e. Saat setimbang, $\vec{F} = 0$, maka akan kita dapatkan

$$\vec{F} = 0 = -\frac{kQ^2a^3z(2z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^4}\hat{k}$$

$$z\left(z - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Kita dapatkan posisi kesetimbangan bola konduktor yaitu $z_0 = 0, z_0 = R/\sqrt{2}$, dan $z_0 = -R/\sqrt{2}$. Untuk mengecek posisi ksetimbangan, kita bisa menggunakan turunan kedua energi potensial sistem. Namun, kita juga bisa mengecek jenis kesetimbangan sistem dengan memberikan sedikit simpangan pada sistem dan melihat persamaan gerak sistem setelahnya. Jika persamaan gerak sistem untuk posisi kesetimbangan berkaitan memenuhi persamaan gerak harmonik sederhana, maka posisi keseimbangan tersebut adalah posisi kesetimbangan stabil. Akan tetapi jika tidak memenuhi persamaan gerak harmonik sederhana maka posisi kesetimbangan tersebut adalah posisi kesetimbangan labil. Mari kita mulai cek untuk $z = 0$. Sekarang kita beri simpangan kecil $z = \eta$, akan kita peroleh

$$\vec{F}(\eta) = -\frac{kQ^2a^3\eta(2\eta^2 - R^2)}{(R^2 + \eta^2)^4}\hat{k} = m\ddot{\eta}\hat{k}$$

Karena η kecil maka dia dapat diabaikan terhadap R sehingga

$$-\frac{kQ^2a^3\eta(-R^2)}{(R^2)^4} \approx m\ddot{\eta}$$

$$\ddot{\eta} - \frac{kQ^2a^3}{mR^6}\eta = 0$$

Kita lihat bahwa persamaan gerak sistem tidak memenuhi $\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$ sehingga posisi $z_0 = 0$ adalah posisi kesetimbangan labil. Berikutnya mari kita cek untuk $z_0 = \pm R/\sqrt{2}$. Kita bisa pilih untuk $z_0 = R/\sqrt{2}$ ataupun $z_0 = -R/\sqrt{2}$, hasilnya nanti akan sama saja, jadi kita pilih salah satu aja. Dalam hal ini saya pilih $z_0 = R/\sqrt{2}$. Sekarang kita beri simpangan kecil pada sistem, $z = R/\sqrt{2} + \eta$, sehingga akan kita peroleh

$$\vec{F}\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+\eta\right)=-\frac{kQ^2a^3\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+\eta\right)\left(2\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+\eta\right)^2-R^2\right)}{\left(R^2+\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+\eta\right)^2\right)^4}\hat{k}=m\ddot{\eta}\hat{k}$$

$$\ddot{\eta}+\frac{kQ^2a^3\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+\eta\right)(2\sqrt{2}\eta R)}{m\left(\frac{3R^2}{2}+\sqrt{2}\eta R\right)^4}\approx 0$$

Karena η kecil maka dia dapat diabaikan terhadap R

$$\ddot{\eta}+\frac{kQ^2a^3\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)(2\sqrt{2}\eta R)}{m\left(\frac{3R^2}{2}\right)^4}\approx 0$$

$$\ddot{\eta}+\frac{32kQ^2a^3}{81mR^6}\eta=0$$

Dapat kita lihat bahwa persamaan gerak sistem memenuhi $\ddot{\eta}+\omega^2\eta=0$. Maka dapat kita simpulkan bahwa posisi $z_0=\pm R/\sqrt{2}$ adalah posisi kesetimbangan stabil. Frekuensi osilasi gerak bola konduktor pada posisi kesetimbangan stabil ini adalah

$$f=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow f=\frac{2Qa}{9\pi R^3}\sqrt{\frac{2ka}{m}}$$

f. Kita bisa menemukan kecepatan akhir bola konduktor dan cincin menggunakan metode energi ataupun metode gaya. Namun, akan jauh lebih sederhana jika kita menggunakan metode energi. Potensial dari cincin adalah

$$V(z)=\frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Dengan demikian, energi potensial sistem akan menjadi

$$EP=q_1V(z_1)+q_2V(z_2)$$

$$EP=-\frac{a}{\sqrt{R^2+z^2}}Q\frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}}+\frac{a}{\sqrt{R^2+z^2}}Q\frac{kQ}{\sqrt{R^2+{z_2}^2}}$$

$$EP=\frac{kQ^2a}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+{z_2}^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Dari bagian sebelumnya, kita telah mempunyai

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+{z_2}^2}}=\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(1-\frac{2a^2z^2}{(R^2+z^2)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+{z_2}^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(1+\frac{a^2z^2}{(R^2+z^2)^2}\right)$$

Sehingga energi potensial sistem akan menjadi

$$EP(z)=\frac{kQ^2a}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}+\frac{a^2z^2}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

$$EP(z)=\frac{kQ^2a^3z^2}{(R^2+z^2)^3}$$

Misal setelah waktu yang sangat lama, kecepatan cincin dan bola masing-masing adalah v_{M} dan v_{m}. Momentum sistem kekal, dari sini akan kita peroleh

$$mv_0=mv_m+Mv_{\mathrm{M}}\Longrightarrow v_{\mathrm{m}}=\frac{mv_0-Mv_{\mathrm{M}}}{m}$$

Setelah waktu yang sangat lama, jarak pisah cincin dan bola konduktor akan menuju tak hingga ($z\to\infty$). Menggunakan Hukum Kekekalan Energi Mekanik akan kita peroleh

$$EM_{\mathrm{awal}}=EM_{\mathrm{akhir}}$$

$$EP\left(\pm\frac{R}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}m{v_0}^2=EP(\infty)+\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{m}}}^2+\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{M}}}^2$$

Energi potensial sistem di posisi kesetimbangan adalah

$$EP\left(\pm\frac{R}{\sqrt{2}}\right)=\frac{kQ^2a^3\frac{R^2}{2}}{\left(R^2+\frac{R^2}{2}\right)^3}=\frac{4kQ^2a^3}{27R^4}$$

Saat z menuju tak hingga, energi potensial sistem akan menuju nol. Dengan demikian, akan kita peroleh

$$\frac{4kQ^2a^3}{27R^4}+\frac{1}{2}m{v_0}^2=0+\frac{1}{2}m\left(\frac{mv_0-Mv_{\mathrm{M}}}{m}\right)^2+\frac{1}{2}M{v_{\mathrm{M}}}^2$$

$$\frac{8kQ^2a^3}{27MR^4}+\frac{m}{M}{v_0}^2=\frac{m}{M}\left({v_0}^2+\frac{M^2}{m^2}{v_{\mathrm{M}}}^2-\frac{2M}{m}v_0v_{\mathrm{M}}\right)+{v_{\mathrm{M}}}^2$$

$$\frac{8kQ^2a^3}{27MR^4}+\frac{m}{M}{v_0}^2=\frac{m}{M}{v_0}^2+\frac{M}{m}{v_{\mathrm{M}}}^2-2v_0v_{\mathrm{M}}+{v_{\mathrm{M}}}^2$$

$$(M+m)\,{v_\mathrm{M}}^2 - 2mv_0 v_\mathrm{M} - \frac{8mkQ^2a^3}{27MR^4} = 0$$

$$a{v_\mathrm{M}}^2 + bv_\mathrm{M} + c = 0$$

Kecepatan v_M bisa kita dapatkan menggunakan rumus kuadrat

$$v_\mathrm{M} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$v_\mathrm{M} = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right)$$

Subtitusi a, b, dan c

$$v_\mathrm{M} = \frac{mv_0}{M+m}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{32(M+m)mkQ^2a^3}{27MR^4}}\right)$$

Karena suku dalam akar lebih dari 1, dan v_M harus lebih dari nol, maka akan kita peroleh

$$v_\mathrm{M} = \frac{mv_0}{M+m}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{32(M+m)mkQ^2a^3}{27MR^4}}\right)$$

$$v_\mathrm{m} = v_0 - \frac{Mv_0}{M+m}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{32(M+m)mkQ^2a^3}{27MR^4}}\right)$$

Untuk mengecek kebenarannya, mari kita tinjau kondisi jika tidak ada interaksi elektrik. Pada kondisi ini, sistem dapat kita ibaratkan seperti massa m menumbuk secara elastis massa M dengan kecepatan v_0. Dengan penyederhanaan ini akan kita peroleh

$$v_\mathrm{M} = \frac{mv_0}{M+m}(1+1) \Rightarrow v_\mathrm{M} = v_\mathrm{M} = \frac{2m}{M+m}v_0$$

$$v_\mathrm{m} = v_0 - \frac{Mv_0}{M+m}(1+1) \Rightarrow v_\mathrm{m} = -\frac{M-m}{M+m}v_0$$

Kita dapatkan hasil seperti yang sudah familiar kita temui untuk kasus tumbukan sederhana dua massa. Dengan demikian, hasil yang telah kita dapatkan sebelumnya dapat dikatakan benar.